

APPUNTI DEL CORSO DI GEOMETRIA 3

(Topologia Generale - Omotopia e Gruppo Fondamentale)

FRANCESCO MAZZOCCA



Disegno di copertina:
Il nastro di Möbius,
di Maurits Cornelis Escher, 1963

Indice

Prefazione	1
1 Elementi di Topologia Generale	3
1.1 Notazioni e richiami	3
1.2 Spazi metrici e funzioni continue	5
1.2.1 Complementi ed esempi	13
1.2.2 Isometrie e proprietà metriche	14
1.3 Spazi topologici: prime proprietà ed esempi	17
1.4 Complementi	29
1.4.1 La topologia di Zariski di \mathbb{F}^n	29
1.4.2 Topologia di Zariski dello spettro di un anello	32
1.4.3 Alcuni assiomi di separazione	35
1.4.4 Successioni	37
1.5 Funzioni continue e omeomorfismi	38
1.5.1 Proprietà topologiche di uno spazio metrico	42
1.5.2 Complementi ed esempi	43
1.6 Spazi connessi	49
1.6.1 Connessione in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n e connessione per poligonalì	52
1.6.2 Componenti connesse	55
1.7 Spazi compatti	57
1.8 Prodotti	63
1.8.1 Compattezza in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n	70

1.9	Complementi	73
1.9.1	Compattificazione di Alexandrov	73
1.9.2	Prodotti di famiglie di spazi	75
1.10	Quozienti	77
1.10.1	Esempi	85
1.11	Superfici topologiche	94
1.11.1	Quozienti di poligoni etichettati	95
1.11.2	Somma connessa di superfici	98
1.11.3	Caratteristica di Eulero-Poincaré e classificazione delle superfici compatte	108
2	Elementi di Topologia Algebrica	111
2.1	Notazioni	111
2.2	Categorie e funtori	112
2.2.1	Il funtore “componenti connesse”	119
2.3	Connessione per archi	119
2.4	Omotopia	127
2.4.1	Omotopia relativa	134
2.4.2	Omotopia tra lacci	137
2.5	Gruppo fondamentale	144
2.5.1	Funtorialità del gruppo fondamentale	147
2.5.2	Gruppo fondamentale ed equivalenze omotopiche	149
2.6	Spazi semplicemente connessi	150
2.7	Gruppo fondamentale della circonferenza e alcune sue applicazioni	155
2.7.1	Teorema fondamentale dell'algebra	161
	INDICE DELLE FIGURE.	163
	RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	166

Prefazione

Questi appunti raccolgono buona parte degli argomenti delle lezioni del corso di *Geometria 3* per gli studenti del *Corso di Laurea in Matematica* dell'Università degli Studi della Campania "L. Vanvitelli", a Caserta. Essi si presentano spesso schematici e mancano molti dei commenti e delle dimostrazioni indispensabili per una presentazione completa degli argomenti trattati. È pertanto necessario integrare la loro lettura con quella di un buon libro, per esempio [9].

Avvertiamo che nella preparazione del corso, e quindi nella stesura di queste note, abbiamo tenuto conto delle conoscenze già acquisite dagli studenti nei precedenti corsi di *Algebra*, *Analisi matematica* e *Geometria*.

Nel concludere, desideriamo ringraziare in anticipo quanti vorranno segnalarci eventuali errori e/o omissioni.

Caserta, dicembre 2018.

Francesco Mazzocca

Questi appunti sono stati elaborati senza fini di lucro, sono distribuiti gratuitamente e ne è vietato qualsiasi tipo di commercio.

Chiunque desideri averne una copia può scaricarla dal seguente indirizzo web:
<http://francesco.mazzocca.name/Geometria3.pdf>

Capitolo 1

Elementi di Topologia Generale

“ Per comprendere la matematica occorre far funzionare il cervello, e questo costa sempre un certo sforzo. Non è possibile fare la matematica "a fumetti", non è possibile trasformare la sua storia in una novellina. Chi è pigro di mente, chi non prova gioia nel far lavorare il suo cervello, è meglio che non cominci neppure a leggere. Chi invece non si spaventa per le fatiche della mente, non si scoraggi se qua e là, a prima vista, non capisce, e non pretenda di leggere tutto di seguito; ma legga attentamente, un poco per volta, saltando le cose più difficili, o facendosele spiegare da chi ha studiato più di lui.”

Lucio Lombardo Radice
(*"La Matematica da Pitagora a Newton", Prefazione*)

1.1 Notazioni e richiami

Nel seguito useremo le seguenti notazioni standard:

- \mathbb{N} = insieme dei numeri naturali.
- \mathbb{Z} = anello dei numeri interi.
- \mathbb{Q} = campo dei numeri razionali.
- \mathbb{R} = campo dei numeri reali.
- \mathbb{N}^+ , \mathbb{Z}^+ , \mathbb{Q}^+ , \mathbb{R}^+ = insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali positivi, rispettivamente.
- \mathbb{C} = campo dei numeri complessi.
- \mathbb{R}^n = spazio euclideo n -dimensionale.

- $\mathbb{R}^{n,m}$ = spazio vettoriale delle matrici con n righe e m colonne a coefficienti reali.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} chiuso e limitato di estremi a, b).
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} limitato, chiuso a sinistra e aperto a destra di estremi a, b ; un intervallo di questo tipo sarà detto intervallo c.a.).
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} limitato, aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi a, b).
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervallo, o segmento, di \mathbb{R} aperto e limitato di estremi a, b).
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}$ (intervallo chiuso semilimitato a sinistra, o semiretta destra chiusa di estremo a).
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$ (intervallo aperto semilimitato a sinistra, o semiretta destra aperta di estremo a).
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq a\}$ (intervallo chiuso semilimitato a destra, o semiretta sinistra chiusa di estremo a).
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < a\}$ (intervallo aperto semilimitato a destra, o semiretta sinistra aperta di estremo a).
- $|a|$ = valore assoluto del numero reale a .
- $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (norma di \mathbf{a}).
- $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a + ib \in \mathbb{C}$ (modulo del numero complesso $a + ib$).
- $GL(n, \mathbb{F})$ = Gruppo delle matrici quadrate invertibili sul campo \mathbb{F} (gruppo lineare di grado n su \mathbb{F}).
- $\mathbb{F}[\mathbf{X}] = \mathbb{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ = Anello dei polinomi sul campo \mathbb{F} nelle variabili X_1, X_2, \dots, X_n ($\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$).

Se a è un elemento di un insieme X , a volte per semplicità denoteremo ancora con a il sottoinsieme $\{a\}$ contenente il solo punto a (**singleton di a**).

DEFINIZIONE 1.1.1. (Ricoprimenti e partizioni) Sia X un insieme non vuoto. Una famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$ di sottoinsiemi di X prende il nome di **ricoprimento di X** se

$$X = \bigcup_{j \in J} A_j,$$

cioè se, per ogni $x \in X$, esiste un indice $t \in J$ tale che $x \in A_t$. Un ricoprimento i cui elementi sono sottoinsiemi a due a due disgiunti è una **partizione** di X .

Ricordiamo che le classi d'equivalenza di una relazione d'equivalenza su X sono una partizione di X e, viceversa, gli elementi di una partizione di X sono le classi d'equivalenza di un'unica relazione d'equivalenza su X . Più in generale, un **ricoprimento di un sottoinsieme Y di X** è una famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$ di sottoinsiemi di X tali che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j. \quad \square$$

Ricordiamo che, per un sottoinsieme Y di X , si definisce **complemento** o **complementare** di Y in X , e si denota con $\mathcal{C}_X(Y)$ l'insieme

$$\mathcal{C}_X(Y) = X \setminus Y = \{a \in X : a \notin Y\}.$$

L'insieme $\mathcal{C}_X(Y)$ si denota anche con $\mathcal{C}(Y)$ se X è chiaro dal contesto. Se $\{Y_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X , risulta

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{C}(Y_j) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} \mathcal{C}(Y_j) \quad (1.1)$$

Se X e T sono insiemi e $f : X \rightarrow T$ una funzione tra X e T , detti A, B due sottoinsiemi di X e C, D due sottoinsiemi di T , risulta

$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B) \quad \text{e} \quad A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B), \quad (1.2)$$

$$f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \quad \text{e} \quad C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D). \quad (1.3)$$

Inoltre, se

$$\{A_i\}_{i \in I}, \quad \{C_j\}_{j \in J}$$

sono famiglie di sottoinsiemi di X e T , rispettivamente, risulta

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{e} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i), \quad (1.4)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} C_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(C_j) \quad \text{e} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} C_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(C_j). \quad (1.5)$$

1.2 Spazi metrici e funzioni continue

Gli elementi di \mathbb{R}^n saranno indifferentemente chiamati **punti** o **vettori**. Ricordiamo che si definisce **distanza euclidea** tra due punti \mathbf{a} e \mathbf{b} di \mathbb{R}^n , e si denota con $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, il numero reale non negativo

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}. \quad (1.6)$$

Osserviamo che nel caso $n = 1$, la (1.6) si riduce a

$$d(a, b) = |b - a|,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. La distanza in \mathbb{R}^n è dunque una funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ed è ben noto che verifica le seguenti **proprietà fondamentali**:

- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$,
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ se, e solo se, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (**proprietà di coincidenza**),
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (**proprietà simmetrica**),
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ (**proprietà triangolare**),

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

La distanza euclidea in \mathbb{R}^n permette di dare la classica definizione di *funzione continua*, nota al Lettore dai corsi di analisi matematica.

DEFINIZIONE 1.2.1. (Funzioni continue tra \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m) Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **continua in un punto** $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ se, per ogni numero reale positivo ϵ , esiste un numero reale positivo δ_ϵ tale che

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_\epsilon \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{a})) < \epsilon. \quad (1.7)$$

La funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **continua** in \mathbb{R}^n se è continua in ogni punto di \mathbb{R}^n . □

OSSERVAZIONE 1.2.2. (Continuità delle funzioni polinomiali tra \mathbb{R}^n e \mathbb{R}) Posto $\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$, sia $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ un polinomio nelle variabili X_1, X_2, \dots, X_n a coefficienti reali. La funzione

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

prende il nome di **funzione polinomiale** (associata ad f). È noto dai corsi di analisi matematica che le funzioni polinomiali sono continue. □

Il concetto di distanza euclidea in \mathbb{R}^n , utilizzando le sue proprietà fondamentali, si generalizza in modo naturale ad insiemi arbitrari nel seguente modo.

DEFINIZIONE 1.2.3. (Spazi metrici) Sia X un insieme non vuoto. Una funzione

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

prende il nome di **distanza**, o **metrica** su X , se, per ogni $a, b, c \in X$, verifica le seguenti proprietà (**assiomi di spazio metrico**):

(M1) $d(a, b) \geq 0$,

(M2) $d(a, b) = 0$ se, e solo se, $a = b$ (**proprietà di coincidenza**),

(M3) $d(a, b) = d(b, a)$ (**proprietà simmetrica**),

(M4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (**proprietà triangolare**).

Quando d è una metrica su X , il numero reale $d(a, b)$ prende il nome di **distanza tra a e b** , la coppia (X, d) si chiama **spazio metrico** e gli elementi di X si dicono **punti**. Uno spazio metrico (X, d) si dice **limitato** se l'insieme

$$\{d(a, b) : a, b \in X\}$$

è limitato superiormente, cioè se ammette l'estremo superiore (**diametro di X**). In questo caso anche la distanza d si dice **limitata**. Se (X, d) non è limitato si dice **illimitato** o **non limitato**. \square

DEFINIZIONE 1.2.4. (Sottospazi metrici) Siano (X, d) uno spazio metrico e Y un sottoinsieme non vuoto di X . La funzione $d|_Y$ (restrizione di d a $Y \times Y$), definita da

$$d|_Y(a, b) = d(a, b), \text{ per ogni } a, b \in Y,$$

risulta una metrica su Y , detta **metrica indotta da d su Y** o **restrizione di d a Y** . Lo spazio metrico $(Y, d|_Y)$ si dice **sottospazio (metrico) di (X, d)** e, se non vi è luogo ad equivoci, la metrica $d|_Y$ si denota semplicemente con d e $(Y, d|_Y)$ semplicemente con Y . Il sottoinsieme Y si dice **limitato** se è limitato come sottospazio metrico. \square

ESEMPIO 1.2.5. (Spazi euclidei) La distanza euclidea d in \mathbb{R}^n , definita dalla (1.6), è chiaramente una metrica (non limitata) su \mathbb{R}^n . Lo spazio metrico relativo (\mathbb{R}^n, d) si chiama **spazio euclideo n -dimensionale** e si denota con \mathbb{E}^n , o semplicemente con \mathbb{R}^n . Per $n = 1, 2$ si parla di **retta euclidea** e **piano euclideo**, rispettivamente. \square

ESEMPIO 1.2.6. (Metrica euclidea su $\mathbb{R}^{n,m}$) Sia $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo $n \times m$ ad elementi in \mathbb{R} . Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

e

$$\mathbf{a} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,m}) \in \mathbb{R}^{nm},$$

la funzione $f : A \in \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nm}$ è biunivoca e induce su $\mathbb{R}^{n,m}$ una metrica d , ponendo $d(A, B) = d(f(A), f(B))$. Tale metrica si dice **metrica euclidea di $\mathbb{R}^{n,m}$** . \square

La nozione di continuità di cui alla **Definizione 1.2.1** si generalizza agli spazi metrici nel seguente modo.

DEFINIZIONE 1.2.7. (Funzioni continue tra spazi metrici) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in un punto $a \in X$ se, per ogni numero reale positivo ϵ , esiste un numero reale positivo δ_ϵ tale che

$$x \in X \text{ e } d_X(x, a) < \delta_\epsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon. \quad (1.9)$$

La funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in X se è continua in ogni punto di X . \square

Nel seguito riterremo assegnato uno spazio metrico (X, d) , che spesso denoteremo semplicemente con X , se non vi è luogo ad equivoci.

DEFINIZIONE 1.2.8. (Intorni sferici e sfere) Per ogni $a \in X$ e $r > 0$ numero reale, si definiscono i seguenti sottoinsiemi di X :

- $B_r(a) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$,
l'**intorno sferico aperto** di centro a e raggio r ;
- $D_r(a) := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$,
l'**intorno sferico chiuso** di centro a e raggio r ;
- $S_r(a) := D_r(a) \setminus B_r(a) = \{x \in S : d(a, x) = r\}$,
la **superficie sferica** di centro a e raggio r . \square

Gli intorni sferici aperti e chiusi, vengono anche chiamati **sfere**, **palle** o **dischi** aperti e chiusi, rispettivamente. Essi sono evidentemente insiemi limitati.

Spesso parleremo semplicemente di intorni sferici, sfere, palle e dischi, omettendo gli aggettivi aperti e chiusi, se questi sono chiari dal contesto o non sono necessari. Per esempio, se diciamo "intorno sferico $B_r(a)$ ", è chiaro dalla notazione che stiamo parlando di un intorno sferico aperto.

OSSERVAZIONE 1.2.9. Per ogni $a \in X$ e $r > 0$ numero reale, gli intorni sferici $B_r(a)$ e $D_r(a)$ contengono il punto a e quindi sono non vuoti, mentre la superficie sferica $S_r(a)$ può essere vuota. Se, generalizzando la **Definizione 1.2.8**, si assume che r possa essere anche nullo, allora risulta $B_0(a) = \emptyset$, $D_0(a) = S_0(a) = \{a\}$. \square

OSSERVAZIONE 1.2.10. Nel caso della retta euclidea, gli intorni sferici aperti e chiusi si riducono agli intervalli limitati rispettivamente aperti e chiusi; più precisamente si ha:

$$B_r(a) = (a - r, a + r) \text{ e } D_r(a) = [a - r, a + r].$$

Inoltre, la superficie sferica $S_r(a)$ si riduce all'insieme di due punti $\{a - r, a + r\}$. Nel caso del piano euclideo, gli intorni sferici e le superfici sferiche si dicono rispettivamente **intorni circolari** e **circonferenze**. \square

OSSERVAZIONE 1.2.11. Nella **Definizione 1.2.7** di funzione continua la (1.9) può risciversi, usando gli intorni sferici, nel seguente modo:

$$x \in B_{\delta_\epsilon}(a) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(a)), \quad (1.10)$$

ove, evidentemente, $B_{\delta_\epsilon}(a)$ e $B_\epsilon(f(a))$ sono intorni sferici negli spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) , rispettivamente. \square

ESERCIZIO 1.2.12. Provare che, per ogni $a \in X$,

1. le famiglie $\{B_r(a)\}_{r>0}$, $\{D_r(a)\}_{r>0}$, $\{S_r(a)\}_{r>0}$ sono ricoprimenti di X ;
2. l'intersezione di due intorni sferici con lo stesso centro è un intorno sferico, più precisamente

$$B_r(a) \cap B_s(a) = B_t(a), \quad D_r(a) \cap D_s(a) = D_t(a), \quad (1.11)$$

ove $t = \min\{r, s\}$ è il più piccolo tra r e s ;

3. l'intersezione di due intorni sferici con centri diversi non è, in generale, un intorno sferico. \square

PROPOSIZIONE 1.2.13. Sia x un punto dell'intorno sferico $B_r(a)$. Allora esiste un numero reale positivo $s > 0$ tale che $B_s(x)$ è contenuto in $B_r(a)$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo s tale che $0 < s < r - d(a, x)$. Allora, applicando la disuguaglianza triangolare ad ogni punto $y \in B_s(x)$, abbiamo

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s < d(a, x) + r - d(a, x) = r$$

e l'asserto è provato. \square

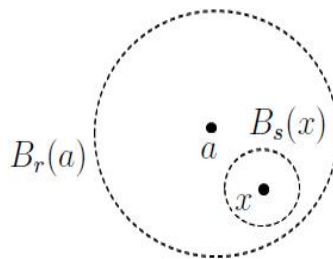


Figura 1.1: Proposizione 1.2.13

PROPOSIZIONE 1.2.14. *Siano $B_r(a)$ e $B_t(b)$ due intorni sferici ad intersezione non vuota. Allora, per ogni $c \in B_r(a) \cap B_t(b)$, esiste un numero reale positivo s tale che*

$$B_s(c) \subseteq B_r(a) \cap B_t(b).$$

Equivalentemente, l'intersezione di due intorni sferici aperti, se non è vuota, è unione di intorni sferici aperti.

DIMOSTRAZIONE. In forza della **Proposizione 1.2.13** esistono due intorni sferici $B_h(c)$ e $B_k(c)$ di centro c contenuti rispettivamente in $B_r(a)$ e $B_t(b)$. Allora, se s è un numero reale positivo minore di $\min\{h, k\}$, risulta $B_s(c) \subseteq B_r(a) \cap B_t(b)$. \square

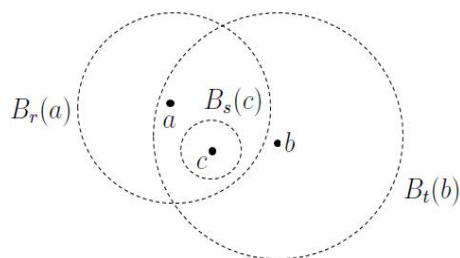


Figura 1.2: Proposizione 1.2.14

PROPOSIZIONE 1.2.15. (Proprietà di Hausdorff, o di separazione) *Se a, b sono punti distinti di X , esistono due intorni sferici di centro rispettivamente a e b che risultano ad intersezione vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Sia r un numero reale tale che $0 < r < \frac{1}{2}d(a, b)$. Allora gli intorni sferici $B_r(a)$ e $B_r(b)$ sono ad intersezione vuota. Infatti, se esistesse un punto $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$, avremmo

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{d(a, b)}{2} + \frac{d(a, b)}{2} = d(a, b),$$

il che è assurdo. \square



Figura 1.3: Proprietà di Hausdorff

PROPOSIZIONE 1.2.16. Per ogni punto a di uno spazio metrico, risulta

$$\bigcap_{r>0} B_r(a) = \{a\}. \quad (1.12)$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo l'esistenza di un punto $b \neq a$ in $\bigcap_{r>0} B_r(a)$ e poniamo $s = d(a, b)$. Allora $b \notin B_s(a)$ e ciò è assurdo. \square

DEFINIZIONE 1.2.17. (Insiemi aperti e chiusi, intorni) Sia assegnato uno spazio metrico (X, d) . Un insieme di punti A di X prende il nome di **insieme aperto**, o semplicemente **aperto**, se è unione di sfere aperte di (X, d) o se è vuoto.

Denoteremo con τ_d l'insieme di tutti gli aperti di (X, d) .

Un insieme di punti C di X prende il nome di **insieme chiuso**, o semplicemente **chiuso**, se risulta il complementare di un aperto. Un insieme di punti U di X prende il nome di **intorno** di un punto $a \in X$ se contiene un aperto contenente a . \square

ESERCIZIO 1.2.18. Provare che in uno spazio metrico valgono le seguenti proprietà:

- *gli intorni sferici aperti sono aperti;*
- *un insieme A è aperto se, per ogni suo punto a , esiste un intorno sferico aperto di centro a contenuto in A ;*
- *gli intorni sferici chiusi e le superfici sferiche sono chiusi;*
- *i punti sono chiusi;*
- *un punto a è aperto se, e solo se, esiste un numero reale positivo k tale che $d(a, x) > k$, per ogni punto x diverso da a ;*
- *un insieme aperto è intorno di ogni suo punto.* \square

PROPOSIZIONE 1.2.19. (Proprietà degli aperti) L'insieme $\tau_d(X)$ di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) verifica le seguenti proprietà:

- *l'insieme vuoto e X sono aperti;*
- *l'unione di un insieme di aperti è un aperto;*
- *l'intersezione di due (e quindi di un numero finito) aperti è un aperto.*

DIMOSTRAZIONE. È una facile conseguenza dell'Esercizio 1.2.12 e della Proposizione 1.2.14. \square

ESEMPIO 1.2.20. (Intersezione di un insieme infinito di aperti) L'intersezione di tutti gli intorni sferici aperti con centro un fissato punto $a \in \mathbb{R}^n$ è uguale ad $\{a\}$, che ovviamente non è unione di sfere aperte. Abbiamo così un esempio di un insieme infinito di aperti la cui intersezione non è un aperto. Osserviamo che in \mathbb{R}^n esistono anche insiemi infiniti di aperti la cui intersezione è un aperto. Per esempio, con $r > 0$, l'intersezione di tutti gli intorni sferici aperti di centro a e contenenti $B_r(a)$ è uguale ad $B_r(a)$, che è un aperto. \square

OSSERVAZIONE 1.2.21. L'insieme di tutti gli intorni sferici aperti con centro un fissato punto di \mathbb{R}^n , pur non contenendo tutti gli aperti di \mathbb{R}^n , verifica le tre

proprietà degli aperti descritte nella **Proposizione 1.2.19**. Questo prova che tali proprietà non sono caratteristiche dell'insieme di *tutti* gli aperti di uno spazio metrico. \square

PROPOSIZIONE 1.2.22. (Due proprietà equivalenti alla continuità in un punto) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua in un punto $a \in X$ se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:

- (i) per ogni aperto A' di Y contenente $f(a)$, esiste un aperto A di X contenente a tale che $f(A) \subseteq A'$;
- (ii) per ogni intorno U' di $f(a)$ in Y , esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq U'$.

DIMOSTRAZIONE. Sia f continua in $a \in X$ e, fissato un aperto A' di Y contenente $a' = f(a)$, consideriamo un intorno sferico $B_s(a')$ in Y contenuto in A' . Allora, per la continuità di f in a , esiste un intorno sferico aperto $B_r(a)$ in X tale che $f(B_r(a)) \subseteq B_s(a') \subseteq A'$. Così, essendo $B_r(a)$ un aperto di X , abbiamo che la continuità di f in a implica la (i).

Supponiamo ora che la f verifichi la (i), fissiamo un intorno U' di $f(a)$ in Y e consideriamo un aperto A' di Y contenente a' e contenuto in U' . Allora esiste un aperto U di X contenente a tale che $f(U) \subseteq A' \subseteq U'$ e U è un intorno di a . Abbiamo, così che (i) implica (ii).

Per finire, supponiamo che valga la (ii) e fissiamo un numero reale $\epsilon > 0$. Allora esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a))$ e, scelto $\delta_\epsilon > 0$ in modo che $B_{\delta_\epsilon}(a) \subseteq U$, risulta

$$x \in B_{\delta_\epsilon}(a) \subseteq U \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(a)).$$

Questo significa che f è continua in a (cfr. (1.10)) e l'asserto è completamente provato. \square

PROPOSIZIONE 1.2.23. (Due proprietà equivalenti alla continuità) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua in X se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:

- (i) per ogni aperto A' di Y , $f^{-1}(A')$ è un aperto di X ;
- (ii) Per ogni $a \in X$ e per ogni intorno U' di $f(a)$ in Y , $f^{-1}(U')$ è un intorno di a in X .

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalla proposizione precedente. \square

OSSERVAZIONE 1.2.24. Notiamo esplicitamente che le proprietà (i) e (ii) delle **Proposizioni 1.2.22** e **1.2.23** utilizzano soltanto nozioni relative agli aperti. Questo significa che potrebbero essere utilizzate per una definizione equivalente di funzione continua, senza un esplicito riferimento alla metrica. \square

1.2.1 Complementi ed esempi

ESEMPIO 1.2.25. (Distanza euclidea su \mathbb{C}^n) Ricordiamo che è possibile identificare \mathbb{R}^{2n} con \mathbb{C}^n (nel caso $n = 1$ abbiamo il *piano di Gauss*) mediante la funzione biunivoca

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Allora la distanza euclidea di \mathbb{R}^{2n} può trasportarsi in \mathbb{C}^n ponendo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2 + \dots + |y_n - x_n|^2},$$

per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. La distanza su \mathbb{C}^n così ottenuta si chiama **distanza euclidea su \mathbb{C}^n** . \square

ESEMPIO 1.2.26. (Metrica discreta) Sia X un insieme non vuoto e, per ogni due elementi $a, b \in X$, si ponga

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ 1 & \text{se } a \neq b \end{cases}. \quad (1.13)$$

La funzione d , come facilmente si verifica, è una metrica su X , detta **metrica discreta**. In questa metrica

- ogni punto è aperto e, di conseguenza, ogni sottoinsieme di X è aperto, in quanto unione dei suoi punti;
- per ogni punto $a \in X$, risulta $S_1(a) = X \setminus \{a\}$ e $S_r(a) = \emptyset$, per ogni $r \neq 1$. \square

ESEMPIO 1.2.27. Per ogni due punti $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ del piano euclideo \mathbb{R}^2 , si ponga

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}. \quad (1.14)$$

La funzione d , come facilmente si verifica, è una metrica su \mathbb{R}^2 . \square

ESEMPI 1.2.28. Sia X l'insieme delle funzioni continue dell'intervallo $[0, 1]$ in \mathbb{R} . Posto

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad d'(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\},$$

per ogni $f, g \in X$, si ha che d e d' sono due distanze su X . \square

ESEMPIO 1.2.29. Sia X l'insieme delle funzioni continue dell'intervallo $[0, 1]$ in \mathbb{R} e si ponga

$$d(f, g) = \min\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\},$$

per ogni $f, g \in X$. Osserviamo che, se per due elementi f, g di X , risulta $d(f, g) = 0$, non necessariamente deve essere $f = g$. Ne segue che d non verifica la proprietà (M3) e, quindi, d non è una metrica su X . \square

ESEMPI 1.2.30. Siano (X, d) uno spazio metrico e r un numero reale positivo. Posto, per ogni $a, b \in X$,

$$d'(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}, \quad d''(a, b) = rd(a, b) \quad \text{e} \quad d'''(a, b) = \min\{1, d(a, b)\},$$

si ha che d', d'' e d''' sono tre distanze su X . Per le metriche d' e d''' , risulta $d'(a, b), d'''(a, b) \leq 1$, per ogni $a, b \in X$ e, quindi, d' e d''' sono esempi di metriche limitate. È inoltre facile provare che $\tau_d = \tau_{d'} = \tau_{d''}$. \square

Considerato uno spazio metrico (X, d) , siano x un punto di X e A, B due sottoinsiemi di X . Gli insiemi di numeri reali

$$\{d(a, x) : a \in A\}, \quad \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

sono limitati inferiormente da 0 e, quindi, ammettono estremi inferiori che denoteremo rispettivamente con $d(x, A)$ e $d(A, B)$. I numeri reali $d(x, A)$ e $d(A, B)$ si chiamano rispettivamente **distanza tra x e A** e **distanza tra A e B** . Valgono le seguenti proprietà di facile verifica:

- (1) $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0$;
- (2) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A, B) = 0$;
- (4) $x \in S_r(a), A = B_r(a) \Rightarrow d(x, A) = 0$;
- (5) $d(a, b) = 2r, A = B_r(a), B = B_r(b) \Rightarrow d(A, B) = 0$.

1.2.2 Isometrie e proprietà metriche

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione di X in Y . Si dice che f **conserva le distanze** se risulta

$$d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b)), \quad \text{per ogni } a, b \in X. \quad (1.15)$$

In questo caso la f , in forza della proprietà (M2), è necessariamente iniettiva.

DEFINIZIONE 1.2.31. (Isometrie) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione biunivoca $f : X \rightarrow Y$ che conserva le distanze prende il nome **isometria** di X in Y . Un'isometria di (X, d_X) in sé prende anche il nome di **movimento** di (X, d_X) . \square

PROPOSIZIONE 1.2.32. *Un'isometria tra due spazi metrici è una funzione continua.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla **Proposizione 1.2.23**. \square

OSSERVAZIONE 1.2.33. Un'isometria tra due spazi metrici trasforma insiemi aperti e chiusi del primo spazio rispettivamente in insiemi aperti e chiusi del secondo. \square

Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ isometrie. È facile provare che:

- la funzione identità di X è un'isometria di X in sé;
- la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ dell'isometria $f : X \rightarrow Y$ è un'isometria di Y in X ;
- la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ delle due isometrie f e g è un'isometria di X in Z .

Le tre precedenti proprietà assicurano che la relazione

$$"X \sim Y \text{ se esiste un'isometria di } X \text{ su } Y "$$

è una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi metrici. Due spazi metrici di una stessa classe d'equivalenza si dicono **isometrici**. L'insieme delle isometrie di uno spazio metrico X in se stesso, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, risulta un gruppo che si chiama **gruppo delle isometrie** o **gruppo dei movimenti** di X e si denota con $Mov(X)$.

ESEMPIO 1.2.34. (Movimenti di \mathbb{R}^n) Ricordiamo che una matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ si dice **ortogonale** se l'inversa A^{-1} coincide con la trasposta A^t . Le matrici ortogonali d'ordine n formano un sottogruppo del gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$, che si chiama **gruppo ortogonale** e si denota con $\mathbb{O}(n)$. Dai corsi di *Geometria 1* e *Geometria 2* sono noti i seguenti risultati.

- Un'applicazione F di \mathbb{R}^n in sé, con $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, è un movimento se, e solo se, è rappresentata da un'equazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

ove $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è un generico vettore,

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e A_F è la matrice ortogonale d'ordine n le cui colonne sono ordinatamente uguali alle componenti dei vettori

$$F(1, 0, \dots, 0), F(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, F(0, \dots, 0, 1).$$

Inoltre, F conserva l'orientamento di \mathbb{R}^n se, e solo se, il determinante della matrice A_F è positivo. I movimenti F di \mathbb{R}^n per cui $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ sono automorfismi vettoriali e si dicono **applicazioni ortogonali**.

- Un'applicazione F di \mathbb{R}^n in sé è un movimento se, e solo se, è rappresentata da un'equazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

ove $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ è un vettore fissato e

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A_F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è l'equazione di un movimento che fissa il vettore nullo $\mathbf{0}$. Inoltre, F conserva l'orientamento di \mathbb{R}^n se, e solo se, il determinante della matrice A_F è positivo. Si osservi che, se $(b_1, b_2, \dots, b_n) \neq \mathbf{0}$, F non è una funzione lineare. \square

OSSERVAZIONE 1.2.35. I movimenti di \mathbb{R}^n che fissano il vettore nullo costituiscono un sottogruppo $Mov_0(\mathbb{R}^n)$ del gruppo $Mov(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione

$$F \in Mov_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow A_F \in \mathbb{O}(n)$$

è un isomorfismo tra i gruppi $Mov_0(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{O}(n)$.

I movimenti di \mathbb{R}^n che fissano il vettore nullo e conservano l'orientamento (**rotazioni di centro $\mathbf{0}$**) costituiscono un sottogruppo $Mov_0^+(\mathbb{R}^n)$ del gruppo $Mov_0(\mathbb{R}^n)$. Le matrici ortogonali a determinante positivo (**matrici ortogonali speciali**) costituiscono un sottogruppo $\mathbb{O}^+(n)$ (**gruppo ortogonale speciale**) del gruppo ortogonale $\mathbb{O}(n)$. L'applicazione

$$F \in Mov_0^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow A_F \in \mathbb{O}^+(n)$$

è un isomorfismo tra i gruppi $Mov_0^+(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{O}^+(n)$. \square

Le **proprietà metriche** di uno spazio metrico (X, d) sono le proprietà di X invarianti per isometrie, ovvero invarianti rispetto al gruppo $Mov(X)$. Si ha, dunque, che ogni proprietà metrica vera in X è tale in un qualsiasi spazio isometrico a X , e viceversa. Quanto detto ci permette di identificare due spazi metrici che siano isometrici; in altre parole, *lo studio degli spazi metrici, rispetto alle proprietà metriche, si fa a meno di isometrie.*

OSSERVAZIONE 1.2.36. (Geometria euclidea) La **geometria euclidea** è lo studio delle proprietà metriche di \mathbb{E}^n . \square

ESEMPIO 1.2.37. La proprietà di uno spazio metrico di essere limitato è una proprietà metrica. Si ha subito, infatti, che non può esistere un'isometria tra uno spazio metrico limitato ed uno illimitato. \square

1.3 Spazi topologici: prime proprietà ed esempi

Molte nozioni e proprietà di uno spazio metrico dipendono essenzialmente dalle proprietà degli insiemi aperti descritte nella **Proposizione 1.2.19** piuttosto che dagli assiomi (M1),(M2),(M3),(M4) della metrica. Per questo motivo, usando le proprietà fondamentali degli aperti di uno spazio metrico, si introducono delle strutture più generali degli spazi metrici stessi: **gli spazi topologici**.

DEFINIZIONE 1.3.1. (Spazi topologici) Siano X un insieme non vuoto, i cui elementi chiamiamo **punti**, e τ una famiglia di sottoinsiemi di X , i cui elementi chiamiamo **insiemi aperti** o, più semplicemente **aperti**. L'insieme τ prende il nome di **topologia** su X se valgono le seguenti proprietà (**assiomi degli aperti**):

- (A1) *l'insieme vuoto e X sono aperti (aperti banali);*
- (A2) *l'unione di un insieme di aperti è un aperto;*
- (A3) *l'intersezione di due aperti (e quindi di un numero finito) è un aperto.*

Quando τ è una topologia su X , la coppia (X, τ) prende il nome di **spazio topologico** e X si dice **sostegno** dello spazio. \square

DEFINIZIONE 1.3.2. (Confronto di topologie) Siano τ e σ due topologie su uno stesso insieme X . Si dice che τ è **meno fine** di σ , e si scrive $\tau \leq \sigma$, se ogni aperto di τ è anche un aperto di σ , cioè $\tau \subseteq \sigma$. Quando τ è meno fine di σ si dice anche che σ è **più fine** di τ . Se $\tau \not\leq \sigma$ e $\sigma \not\leq \tau$ si dice che τ e σ sono **inconfrontabili**. \square

OSSERVAZIONE 1.3.3. Nell'insieme di tutte le topologie su un insieme X , la relazione di finezza risulta un ordine parziale. \square

ESEMPIO 1.3.4. Sia (X, τ) uno spazio topologico e, detto a un punto di X , sia τ^a l'insieme costituito dal vuoto e da tutti gli aperti di τ contenenti il punto a . È immediato provare che τ^a è una topologia su X meno fine di τ . Inoltre, risulta $\tau = \tau^a$ se, e solo se, ogni aperto di τ contiene il punto a . L'esempio precedente mostra anche che, se un insieme σ di aperti di una topologia τ su X verifica gli assiomi degli aperti, non è detto che σ sia la famiglia τ di tutti gli aperti di (X, τ) . Più precisamente, se un insieme σ di aperti di una topologia τ su X verifica gli assiomi degli aperti, allora σ è una topologia su X meno fine di τ . \square

DEFINIZIONE 1.3.5. (Sottospazi) Se (X, τ) è uno spazio topologico e Y un sottoinsieme non vuoto di X , la famiglia

$$\tau_Y = \{Y \cap A \text{ con } A \in \tau\}$$

è una topologia su Y , detta **topologia indotta**. Lo spazio topologico (Y, τ_Y) prende il nome di **sottospazio topologico** o, più semplicemente **sottospazio**, di X . \square

OSSERVAZIONE 1.3.6. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X . Ogni aperto di X contenuto in Y è un aperto nella topologia indotta su Y . \square

ESERCIZIO 1.3.7. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X . Provare che gli aperti nella topologia indotta su Y sono tutti e soli gli aperti di X contenuti in Y se, e solo se, Y è un aperto in X . \square

Nel seguito riterremo sempre assegnato uno spazio topologico (X, τ) , che spesso denoteremo soltanto con X , se ciò non darà luogo ad equivoci. Inoltre, ogni sottoinsieme di X sarà sempre riguardato come suo sottospazio.

DEFINIZIONE 1.3.8. (Insiemi chiusi) Un sottoinsieme C di uno spazio topologico X si dice **insieme chiuso** o, più semplicemente **chiuso**, se il suo complementare $\mathcal{C}(C)$ è un aperto in X . Se Y è un sottoinsieme di X , un **chiuso di Y** è un sottoinsieme di Y chiuso nella topologia indotta. \square

ESERCIZIO 1.3.9. Sia Y un sottospazio dello spazio topologico X . Provare che i chiusi nella topologia indotta su Y sono tutte e sole le intersezioni dei chiusi di X con Y , in particolare, ogni chiuso di X contenuto in Y è un chiuso nella topologia indotta su Y . Provare, inoltre, che i chiusi nella topologia indotta su Y sono tutti e soli i chiusi di X contenuti in Y se, e solo se, Y è un chiuso in X . \square

L'insieme di tutti i chiusi dello spazio topologico (X, τ) sarà denotato con \mathcal{C}_τ o, più semplicemente, con \mathcal{C} . È chiaro che, essendo il complemento di un chiuso un aperto e valendo le (1.1), vi è una dualità tra l'insieme τ degli aperti e quello \mathcal{C}_τ

dei chiusi, che scambia tra loro “aperti con chiusi”, “unione con intersezione” e “contenente con contenuto”. Questo, tra l’altro, significa che la conoscenza di \mathcal{C}_τ equivale alla conoscenza di τ . Utilizzando le (1.1) è facile provare che i chiusi di uno spazio topologico X verificano le seguenti proprietà:

- *l’insieme vuoto e X sono chiusi (**chiusi banali**);*
- *l’unione di due chiusi (e quindi di un numero finito) è un chiuso;*
- *l’intersezione di un insieme di chiusi è un chiuso.*

Se un insieme di chiusi di una topologia τ su X verifica le tre precedenti proprietà, non è detto che sia la famiglia di tutti i chiusi di τ . Per esempio, supponiamo che esista in (X, τ) un chiuso non contenente un fissato punto $a \in X$. Allora l’insieme costituito dal vuoto e da tutti i chiusi contenenti a verifica le nostre proprietà e non è l’insieme di tutti i chiusi di (X, τ) . Ciò nonostante, le proprietà in questione possono considerarsi caratteristiche dei chiusi e possono essere usate come assiomi per definire una topologia, nel senso precisato dalla proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 1.3.10. *Siano X un insieme non vuoto e \mathcal{C} un insieme di sottoinsiemi di X , i cui elementi chiamiamo chiusi. Supponiamo che siano verificate le seguenti proprietà (**assiomi dei chiusi**):*

- (C1) *l’insieme vuoto e X sono chiusi;*
- (C2) *l’unione di due chiusi (e quindi di un numero finito) è un chiuso;*
- (C3) *l’intersezione di un insieme di chiusi è un chiuso.*

Allora $\tau = \{\mathcal{C}(C) : C \in \mathcal{C}\}$ è l’unica topologia su X per cui \mathcal{C} è l’insieme dei chiusi; cioè $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\tau$.

DIMOSTRAZIONE. È una facile conseguenza delle (1.1). □

ESEMPI 1.3.11. Siano X un insieme non vuoto e $P(X)$ l’insieme delle sue parti.

- $\{\emptyset, X\}$ è una topologia su X , detta **banale**. Questa topologia ha solo due aperti (il minimo numero possibile), che sono anche chiusi. Essa è la meno fine fra tutte le topologie definite su X .
- $P(X)$, l’insieme delle parti di X , è una topologia su X , detta **discreta**. In questa topologia ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso. La topologia discreta è la più fine fra tutte le topologie definite su X e coincide con quella banale solo nel caso in cui X è un singleton, cioè un insieme con un unico elemento.
- $\{\emptyset, Y, X\}$, con $\emptyset \neq Y \subset X$, è una topologia su X , detta **topologia con tre aperti**. I chiusi di questa topologia sono: $\emptyset, \mathcal{C}(Y), X$.
- X e i suoi sottoinsiemi finiti sono i chiusi di una topologia su X , detta **topologia cofinita**. Gli aperti non vuoti di questa topologia sono i sottoinsiemi cofiniti, cioè i complementari degli insiemi finiti. Quando X è finito, la topologia cofinita coincide con quella discreta. □

ESEMPIO 1.3.12. (Topologia somma) Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici con sostegni disgiunti e poniamo

$$\tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{A_1 \cup A_2 \subseteq X_1 \cup X_2 \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}. \quad (1.18)$$

La famiglia τ , come subito si prova, è una topologia sull'unione $X_1 \cup X_2$ che prende il nome di **topologia somma**, o **unione**, di τ_1 e τ_2 . Lo spazio topologico $(X_1 \cup X_2, \tau)$ si chiama **spazio somma**, o **unione**, di (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) e sarà denotato con $X_1 \sqcup X_2$. È facile rendersi conto che valgono le seguenti proprietà:

- ogni aperto in X_1 e X_2 è aperto anche in $X_1 \sqcup X_2$, in particolare X_1 e X_2 sono aperti in $X_1 \sqcup X_2$;
- la topologia indotta da τ su X_i è $\tau_i, i = 1, 2$; □

ESEMPIO 1.3.13. (Topologia indotta su X da $f : X \rightarrow Y$) Siano X un insieme, (Y, σ) uno spazio topologico e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. La famiglia

$$f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A) : A \in \sigma\}$$

è una topologia su X che prende il nome di **topologia indotta da f su X** . □

ESEMPIO 1.3.14. (Topologia indotta su Y da $f : X \rightarrow Y$) Siano (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. La famiglia

$$\tau_f = \{T \subseteq Y \text{ tale che } f^{-1}(T) \in \tau\}$$

è una topologia su Y che prende il nome di **topologia indotta da f su Y** . □

ESEMPIO 1.3.15. (Topologia naturale di \mathbb{R}) Un sottoinsieme A di \mathbb{R} si dice **aperto naturale** se è vuoto o se è unione di intervalli aperti. L'insieme degli aperti naturali di \mathbb{R} è una topologia su \mathbb{R} , detta **topologia naturale** (cfr. **Proposizione 1.2.19**). □

ESEMPIO 1.3.16. (Topologia naturale di \mathbb{R}^n) Sia n un intero positivo. Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice **aperto naturale** se è vuoto o se è unione di sfere aperte. L'insieme degli aperti naturali di \mathbb{R}^n è una topologia su \mathbb{R}^n , detta **topologia naturale**. Ovviamente, nel caso $n = 1$, si ritrova la topologia naturale di \mathbb{R} (cfr. **Proposizione 1.2.19**) □

ESEMPIO 1.3.17. (Topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$) Sia $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo $n \times m$ ad elementi in \mathbb{R} . Posto

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{a} = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,m} \cdots a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,m}),$$

la funzione $f : A \in \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{nm}$ è biunivoca e la topologia indotta su $\mathbb{R}^{n,m}$ dalla funzione f si dice **topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$** . Chiaramente la topologia naturale di $\mathbb{R}^{n,m}$ è proprio quella indotta dalla metrica euclidea d (cfr. **Esempio 1.2.6**). \square

ESEMPIO 1.3.18. (Topologia associata ad una metrica) L'insieme $\tau_d(X)$ di tutti gli aperti di uno spazio metrico (X, d) è una topologia su X , detta **topologia associata alla metrica d** . Per esempio, la topologia associata alla metrica euclidea di \mathbb{R}^n è la topologia naturale di \mathbb{R}^n (cfr. **Proposizione 1.2.19**). \square

ESEMPIO 1.3.19. (Topologia del tiro a bersaglio) Sia a un punto di uno spazio metrico X . Allora l'insieme vuoto, X e gli intorni sferici aperti di centro a sono gli aperti di una topologia su X , che si dice **topologia del tiro a bersaglio**. \square

ESEMPIO 1.3.20. (Topologia delle semirette sinistre aperte) Per ogni numero reale a , chiamiamo **semiretta sinistra aperta di vertice a** , e la denotiamo con S_a , l'intervallo $(-\infty, a)$. È chiaro che, se $a < b$, risulta $S_a \cap S_b = S_a$. D'altra parte, se $\{S_a\}_{a \in A}$ è una famiglia di semirette sinistre aperte, risulta

$$\bigcup_{a \in A} S_a = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } A \text{ non è limitato superiormente} \\ S_e, & \text{se } A \text{ è limitato superiormente e } e = \sup\{A\} \end{cases}.$$

Allora, l'insieme vuoto, \mathbb{R} e le semirette sinistre aperte sono gli aperti di una topologia su \mathbb{R} , che si chiama **topologia delle semirette sinistre aperte** o **topologia della semicontinuità superiore** di \mathbb{R} . In questa topologia i chiusi non banali sono le semirette destre chiuse. Osserviamo che ogni semiretta S_a è unione di intervalli aperti perché risulta

$$S_a = \bigcup_{b < a} (b, a).$$

Ne segue che la **topologia delle semirette sinistre aperte** è meno fine di quella naturale di \mathbb{R} . \square

ESERCIZIO 1.3.21. Provare che la topologia delle semirette sinistre aperte di \mathbb{R} e quella cofinita su un insieme infinito verificano la seguente proprietà: **due aperti non vuoti sono ad intersezione non vuota**. \square

Nel seguito, tranne esplicito avviso, supporremo sempre che \mathbb{R}^n , $n > 0$, sia dotato della topologia naturale e, se non vi è luogo ad equivoci, i suoi aperti naturali saranno chiamati semplicemente aperti. Analogamente, supporremo sempre che uno spazio metrico (X, d) sia dotato della topologia associata a d .

DEFINIZIONE 1.3.22. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **metrizzabile** se esiste una metrica d su X la cui topologia associata τ_d coincide con τ . \square

ESEMPI 1.3.23. Le topologie associate alle metriche, ovviamente, sono metrizzabili “per costruzione”. La topologia con tre aperti su un insieme X , con $|X| > 2$, e la topologia di \mathbb{R} delle semirette sinistre aperte non sono metrizzabili perché i loro punti non sono tutti chiusi (cfr. **Esercizio 1.2.18**). \square

DEFINIZIONE 1.3.24. (Basi) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una sua famiglia di aperti. Si dice che \mathcal{B} è una **base** (per la topologia τ) se ogni aperto di X è unione di elementi di \mathcal{B} . \square

ESEMPIO 1.3.25. (Sfere aperte e basi) Una base della topologia associata ad uno spazio metrico è, per costruzione, l’insieme di tutte le sfere aperte. In particolare, gli intorni circolari aperti di \mathbb{R}^2 e gli intervalli aperti di \mathbb{R} sono basi rispettivamente per \mathbb{R}^2 e \mathbb{R} . \square

ESERCIZIO 1.3.26. Siano X uno spazio topologico, Y un suo sottospazio e \mathcal{B} una base di X . Provare che la famiglia degli aperti di Y ottenuti intersecando gli elementi di \mathcal{B} con Y è una base di Y . \square

Tenendo presente che l’intersezione di due elementi di una base è un aperto, si ha subito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3.27. Sia X uno spazio topologico. Se $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ è una base di X , allora sono verificate le seguenti proprietà:

- \mathcal{B} è un ricoprimento di aperti di X ;
- per ogni $x \in B_s \cap B_t$, esiste $k \in J$ tale che $x \in B_k \subseteq B_s \cap B_t$, per ogni $s, t \in J$ (cioè $B_s \cap B_t$ è unione di elementi di \mathcal{B}).

Se un insieme di aperti \mathcal{B} di una topologia τ su X verifica le due precedenti proprietà, non è detto che \mathcal{B} sia una base per τ . Per esempio, gli intorni sferici di centro un fissato punto di \mathbb{R}^n verificano le nostre proprietà e, evidentemente, non costituiscono una base della topologia naturale. Anche le proprietà in questione, però, possono essere usate come assiomi per una topologia nel senso precisato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.3.28. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottoinsiemi di X per cui siano verificate le seguenti proprietà (**assiomi delle basi**):

- (B1) \mathcal{B} è un ricoprimento di X ;
- (B2) per ogni $x \in B_s \cap B_t$, esiste $k \in J$ tale che $x \in B_k \subseteq B_s \cap B_t$, per ogni $s, t \in J$, cioè $B_s \cap B_t$ è unione di elementi di \mathcal{B} .

Allora l'insieme vuoto e le unioni di elementi di \mathcal{B} sono gli aperti di un'unica topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ su X per cui \mathcal{B} è una base (**topologia associata a \mathcal{B}**).

DIMOSTRAZIONE. È lasciata al Lettore. □

È chiaro che, se \mathcal{B} è una base per una topologia τ su X , la topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ associata a \mathcal{B} coincide con τ .

ESEMPIO 1.3.29. (La retta di Sorgenfrey) L'insieme \mathcal{B}_{ca} degli intervalli c.a. di \mathbb{R} , cioè del tipo $[a, b)$, verifica gli assiomi delle basi e quindi esiste un'unica topologia su \mathbb{R} per cui \mathcal{B}_{ca} è una base (cfr. **Proposizione 1.3.28**). Questa topologia si chiama topologia di **Sorgenfrey** o **degli intervalli c.a.** e i suoi aperti non vuoti sono le unioni di intervalli c.a.. L'insieme dei numeri reali con questa topologia si chiama **retta di Sorgenfrey**. Osserviamo che ogni intervallo aperto (a, b) è unione di intervalli c.a. perché risulta

$$(a, b) = \bigcup_{a < c < b} [c, b).$$

Ne segue che la topologia naturale di \mathbb{R} è meno fine di quella di Sorgenfrey. □

DEFINIZIONE 1.3.30. (Secondo assioma di numerabilità) Si dice che uno spazio topologico X verifica il **secondo assioma di numerabilità**, o che è uno spazio \mathcal{N}_2 , se possiede una base finita o numerabile. Gli spazi topologici \mathcal{N}_2 si dicono anche **a base numerabile**. □

ESEMPIO 1.3.31. (\mathbb{R}^n è \mathcal{N}_2) In \mathbb{R}^n la famiglia

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{a}) : n \geq 1 \text{ intero e } \mathbf{a} \text{ punto a coordinate razionali}\}$$

è una base numerabile e, quindi, \mathbb{R}^n è \mathcal{N}_2 . □

ESEMPIO 1.3.32. (La retta di Sorgenfrey non è \mathcal{N}_2) Sia \mathcal{B} una base della topologia di Sorgenfrey. Allora, fissato un numero reale positivo a , per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq [x, x + a)$. Se $y \in \mathbb{R}$ e $y > x$, risulta $x \notin [y, y + a)$ e quindi $x \notin B_y$. Ne segue che la funzione

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow B_x \in \mathcal{B}$$

è iniettiva e, di conseguenza, la cardinalità di \mathcal{B} non può essere minore di $|\mathbb{R}|$, la potenza del continuo. Abbiamo così che \mathcal{B} non è numerabile. □

ESEMPIO 1.3.33. (La topologia discreta non è necessariamente \mathcal{N}_2) Nella topologia discreta su un insieme X tutti i punti sono aperti e quindi, in questa topologia, ogni base deve necessariamente contenere tutti i singleton di X . Allora, se X è

infinito e non numerabile, la topologia discreta di X non può avere basi finite o numerabili. Per esempio, non è \mathcal{N}_2 la topologia discreta su \mathbb{R}^n .

Poichè la topologia discreta è associata alla metrica discreta, quanto precedentemente detto prova che *la topologia di uno spazio metrico non è necessariamente a base numerabile*. \square

PROPOSIZIONE 1.3.34. (Una topologia \mathcal{N}_2 ha cardinalità non superiore al continuo) Sia (X, τ) uno spazio a base numerabile. Allora τ ha cardinalità non superiore alla potenza del continuo.

DIMOSTRAZIONE. Se \mathcal{B} è una base finita o numerabile di τ e $2^{\mathcal{B}}$ l'insieme delle parti di \mathcal{B} , la cardinalità di $2^{\mathcal{B}}$ non supera quella del continuo. D'altra parte la funzione che ad ogni sottoinsieme \mathcal{A} di \mathcal{B} associa l'aperto $\cup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$ è suriettiva e, quindi, la cardinalità di τ non supera quella di $2^{\mathcal{B}}$, da cui l'asserto. \square

DEFINIZIONE 1.3.35. (Intorni e sistemi fondamentali di intorni) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e a un suo punto.

- Un sottoinsieme U di X si dice **intorno di a** se contiene un aperto contenente a .
- Una famiglia $\mathcal{U}_a = \{U_j\}_{j \in J}$ di intorni di a si dice **sistema fondamentale di intorni di a** se ogni aperto A contenente a contiene un intorno $U_s \in \mathcal{U}_a$.
- Un **sistema fondamentale di intorni di X** è una famiglia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$, ove \mathcal{U}_a è un sistema fondamentale di intorni di a , per ogni $a \in X$. \square

PROPOSIZIONE 1.3.36. (Intorni e aperti) Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme A di X è aperto se, e solo se, ogni punto di A possiede almeno un intorno contenuto in A .

DIMOSTRAZIONE. Se A è aperto, risulta intorno di ogni suo punto. Se ogni punto a di un insieme $A \subseteq X$ possiede un intorno U_a contenuto in A , esiste un aperto A_a tale che $a \in A_a \subseteq U_a \subseteq A$. Allora risulta $A = \cup_{a \in A} A_a$ e A , in quanto unione di aperti, è un aperto. \square

ESERCIZIO 1.3.37. Siano (X, τ) uno spazio topologico e Y un sottospazio con la topologia indotta τ_Y . Provare che:

- se $a \in Y$ e U è un intorno di a in X , allora $U \cap Y$ è un intorno di a in τ_Y ;
- se $a \in Y$ e \mathcal{U}_a è un sistema fondamentale di intorni di a in X , allora $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}_a\}$ è un sistema fondamentale di intorni di a in τ_Y .

PROPOSIZIONE 1.3.38. (Sistemi fondamentali di intorni e basi) Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico, si ha:

- se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X , allora $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \bigcup_{a \in X} \mathcal{U}_a$ è una base di X ;

- se \mathcal{B} è una base di X , posto $\mathcal{U}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$ per ogni $a \in X$, la famiglia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X .

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X , allora $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \bigcup_{a \in X} \mathcal{U}_a$ è un ricoprimento di aperti di X . Inoltre, se A è un aperto, ogni punto $a \in A$ appartiene ad un intorno $U \in \mathcal{U}_a$ contenuto in A e, così, $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ è una base di X .

D'altra parte, se \mathcal{B} è una base di X e, per $a \in X$, si pone $\mathcal{U}_a = \{B \in \mathcal{B} : a \in B\}$, ogni aperto A contenente a contiene un elemento di \mathcal{U}_a contenuto in A . Ne segue che $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in X}$ è un sistema fondamentale di intorni aperti di X . \square

DEFINIZIONE 1.3.39. (Primo assioma di numerabilità) Si dice che uno spazio topologico X verifica il **primo assioma di numerabilità**, o che è uno spazio \mathcal{N}_1 , se ogni suo punto possiede un sistema fondamentale di intorni finito o numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.40. (Gli spazi metrici sono \mathcal{N}_1) Per ogni punto a di uno spazio metrico X , la famiglia

$$\mathcal{U}_a = \{B_{\frac{1}{n}}(a) : n \geq 1 \text{ intero}\}$$

è un sistema fondamentale di intorni di a finito o numerabile e, quindi, X è \mathcal{N}_1 . \square

PROPOSIZIONE 1.3.41. ($\mathcal{N}_2 \Rightarrow \mathcal{N}_1$) Se uno spazio topologico X è \mathcal{N}_2 , allora è anche \mathcal{N}_1 .

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla seconda parte **Proposizione 1.3.38**. \square

ESEMPIO 1.3.42. (La retta di Sorgenfrey è \mathcal{N}_1) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la famiglia

$$\left\{ \left[a, a + \frac{1}{n} \right), n \text{ intero positivo} \right\}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile di a nella topologia di Sorgenfrey. La retta di Sorgenfrey è dunque \mathcal{N}_1 . Questo è un esempio di spazio \mathcal{N}_1 che non è \mathcal{N}_2 (cfr. **Esempio 1.3.32**); così abbiamo che la proposizione precedente non può invertirsi. \square

ESERCIZIO 1.3.43. Provare che gli spazi topologici discreti sono \mathcal{N}_1 . \square

DEFINIZIONE 1.3.44. (Chiusura e interno di un insieme) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X . L'intersezione di tutti i chiusi di X contenenti Y si chiama **chiusura di Y** e si denota con \bar{Y} . L'unione di tutti gli aperti di X contenuti in Y si chiama **interno, o parte interna, di Y** e si denota con $\overset{\circ}{Y}$. Un punto appartenente $\overset{\circ}{Y}$ si dice **interno a Y** . Un punto interno al complemento di Y si dice **esterno a Y** . \square

Se $Y \subseteq X$, l'insieme dei chiusi contenenti Y è non vuoto perché X stesso è un chiuso contenente Y . Così, la chiusura \bar{Y} di Y , essendo intersezione di chiusi, è un chiuso contenente Y e, se Y è non vuoto, anche \bar{Y} è non vuoto. L'interno $\overset{\circ}{Y}$ di Y , essendo unione di aperti, è un aperto contenuto in Y e può essere vuoto pur essendo Y non vuoto. Le funzioni

$$Y \in P(X) \rightarrow \bar{Y} \in P(X) \quad \text{e} \quad Y \in P(X) \rightarrow \overset{\circ}{Y} \in P(X)$$

prendono rispettivamente il nome di **operatore di chiusura** e **operatore di passaggio all'interno** dello spazio topologico X .

ESERCIZIO 1.3.45. (Proprietà della chiusura e dell'interno) Provare che valgono le seguenti proprietà per la chiusura e l'interno di un insieme $Y \subseteq X$:

- $Y \subseteq \bar{Y}$
- $Y = \bar{Y} \Leftrightarrow Y$ è chiuso
- $\overline{\bar{Y}} = \bar{Y}$
- $\overline{\emptyset} = \emptyset$
- $\overset{\circ}{Y} \subseteq Y$
- $Y = \overset{\circ}{Y} \Leftrightarrow Y$ è aperto
- $\overset{\circ}{\overset{\circ}{Y}} = \overset{\circ}{Y}$
- $\overset{\circ}{X} = X$ □

OSSERVAZIONE 1.3.46. In uno spazio topologico, in forza del precedente esercizio, si ha che

- gli insiemi chiusi sono tutti e soli gli elementi uniti nell'operatore di chiusura,
- gli insiemi aperti sono tutti e soli gli elementi uniti nell'operatore di passaggio all'interno. □

PROPOSIZIONE 1.3.47. Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X , risulta

$$\bar{Y} \cup \bar{T} = \overline{Y \cup T} \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{Y} \cap \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{Y \cap T}. \quad (1.19)$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'essere $Y \subseteq \bar{Y}$, $T \subseteq \bar{T}$ segue $Y \cup T \subseteq \bar{Y} \cup \bar{T}$ e, quindi, $\overline{Y \cup T} \subseteq \overline{\bar{Y} \cup \bar{T}} = \overline{\bar{Y} \cup \bar{T}}$. D'altra parte, dall'essere $Y, T \subseteq Y \cup T$ segue $\bar{Y}, \bar{T} \subseteq \overline{Y \cup T}$ e, quindi, $\bar{Y} \cup \bar{T} \subseteq \overline{Y \cup T}$. Abbiamo così la prima delle (1.19); la seconda si prova in modo analogo. □

ESERCIZIO 1.3.48. Siano X un insieme non vuoto e

$$Y \in P(X) \rightarrow \bar{Y} \in P(X) \quad (1.20)$$

una funzione tale che

$$Y \subseteq \bar{Y}, \quad \overline{\bar{Y}} = \bar{Y}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \bar{Y} \cup \bar{T} = \overline{Y \cup T},$$

per ogni $Y, T \subseteq X$. Provare che la famiglia $\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C = \overline{C}\}$ è la famiglia dei chiusi dell'unica topologia su X per cui la funzione (1.20) è l'operatore di chiusura. \square

ESERCIZIO 1.3.49. Siano X un insieme non vuoto e

$$Y \in P(X) \rightarrow \overset{\circ}{Y} \in P(X) \quad (1.21)$$

una funzione tale che

$$\overset{\circ}{Y} \subseteq Y, \overset{\circ}{\overset{\circ}{Y}} = \overset{\circ}{Y}, \overset{\circ}{X} = X, \overset{\circ}{Y} \cap \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{Y \cap T},$$

per ogni $Y, T \subseteq X$. Provare che la famiglia $\tau = \{A \subseteq X : A = \overset{\circ}{A}\}$ è la famiglia degli aperti dell'unica topologia su X per cui la funzione (1.21) è l'operatore di passaggio all'interno. \square

ESERCIZIO 1.3.50. Provare che in \mathbb{R}^n risulta:

$$\overline{B_r(a)} = D_r(a), D_r(a) = B_r(a), S_r(a) = \emptyset, \quad (1.22)$$

per ogni $a \in X$ e ogni numero reale positivo r . Trovare qualche esempio di spazio metrico in cui le (1.22) non sono verificate. \square

DEFINIZIONE 1.3.51. (Aderenza) Siano X uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X . Un punto $a \in X$ si dice **di aderenza per Y** , o **aderente ad Y** , se ogni intorno di a è ad intersezione non vuota con Y . \square

PROPOSIZIONE 1.3.52. (Aderenza e chiusura) L'insieme dei punti di aderenza di un insieme di punti Y di uno spazio topologico coincide con la chiusura \overline{Y} di Y .

DIMOSTRAZIONE. Proveremo, per contrapposizione, che un punto y non è di aderenza per Y se, e solo se, y non appartiene alla chiusura di Y .

Se y non è aderente a Y , esiste un aperto A contenente y e disgiunto da Y . Allora il complemento di A è un chiuso contenente Y cui y non appartiene e ciò significa che y non appartiene alla chiusura di Y . Viceversa, se $y \notin \overline{Y}$, il complemento di \overline{Y} è un aperto contenente y disgiunto da Y e, così, y non è aderente a Y . \square

DEFINIZIONE 1.3.53. (Punti di accumulazione, isolati e di frontiera, insiemi densi) Siano $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e Y un sottoinsieme di X . Un punto a aderente a Y si dice

- **di accumulazione per Y** se ogni intorno di a contiene qualche punto di Y diverso da a ;
- **isolato per Y** se esiste un intorno di a che interseca Y nel solo punto a ;

- **di frontiera per** Y se è aderente anche a $\mathcal{C}(Y)$.

L'insieme dei punti di accumulazione di Y prende il nome di **derivato di** Y e si denota con $D(Y)$. L'insieme dei punti isolati di Y prende il nome di **isolato di** Y e si denota con $I(Y)$. L'insieme dei punti di frontiera di Y prende il nome di **frontiera di** Y e si denota con ∂Y . Se ogni punto dello spazio X è aderente a Y , cioè $\bar{Y} = X$, si dice che Y è **denso in** X . \square

ESERCIZIO 1.3.54. Provare che, per $Y \subseteq X$, valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{Y} = Y \cup D(Y) = Y \cup \partial Y, \quad I(Y) = \bar{Y} \setminus D(Y). \quad (1.23)$$

\square

DEFINIZIONE 1.3.55. (Spazi separabili) Uno spazio topologico X si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme D finito o numerabile che sia denso in X , cioè $\bar{D} = X$. \square

PROPOSIZIONE 1.3.56. ($\mathcal{N}_2 \Rightarrow$ separabilità) Se uno spazio topologico X è \mathcal{N}_2 , allora è anche separabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una base di X , con J insieme finito o numerabile. Allora, usando l'assioma della scelta, possiamo considerare un punto $x_j \in B_j$, per ogni $j \in J$, e costruire l'insieme $D = \{x_j : j \in J\}$. Ora, se y è un punto di X , ogni intorno di y contiene un elemento di \mathcal{B} contenente y e, quindi, un punto di D . Così ogni punto di X è aderente a D , che per costruzione è finito o numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.57. (\mathbb{R}^n è separabile) In forza della precedente proposizione \mathbb{R}^n con la topologia naturale, essendo \mathcal{N}_2 , è separabile. Per esempio, l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n a coordinate razionali è denso in \mathbb{R}^n e numerabile. \square

ESEMPIO 1.3.58. (La retta di Sorgenfrey è separabile) Ogni intervallo di \mathbb{R} del tipo $[a, b)$ contiene numeri razionali. Ciò significa che l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali, che è numerabile, è denso in \mathbb{R} con la topologia di Sorgenfrey. In altre parole, la retta di Sorgenfrey è separabile. Questo è un *esempio di spazio separabile che non è \mathcal{N}_2* (cfr. **Esempio 1.3.32**); così abbiamo che la proposizione precedente non può invertirsi. \square

La **Proposizione 1.3.56** si inverte nel caso degli spazi metrici.

PROPOSIZIONE 1.3.59. (Negli spazi metrici la separabilità implica \mathcal{N}_2) Uno spazio metrico (X, d) che sia separabile è anche \mathcal{N}_2 .

DIMOSTRAZIONE. Se D è un insieme numerabile di punti di X tale che $\overline{D} = X$, vogliamo provare che la famiglia

$$\mathcal{B} = \{B_q(y) : y \in D, q \in \mathbb{Q}^+\},$$

che è numerabile, risulta una base di X . A tale scopo, osservato che \mathcal{B} è un ricoprimento di X , basta far vedere che ogni intorno sferico $B_r(x), x \in X, r \in \mathbb{R}^+$ è unione di elementi di \mathcal{B} .

Per ogni punto $z \in B_r(x)$, sia $\rho \in \mathbb{R}^+$ tale che $B_\rho(z) \subseteq B_r(x)$ e, considerato un punto $y \in B_\rho(z) \cap D$, sia $q \in \mathbb{Q}^+$ tale che

$$d(y, z) < q < \frac{\rho}{2},$$

da cui $z \in B_q(y) \in \mathcal{B}$. Proviamo che $B_q(y) \subseteq B_\rho(z)$:

$$t \in B_q(y) \Rightarrow d(t, z) \leq d(t, y) + d(y, z) < q + q < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,$$

quindi t appartiene a $B_\rho(z)$ e l'asserto è provato. \square

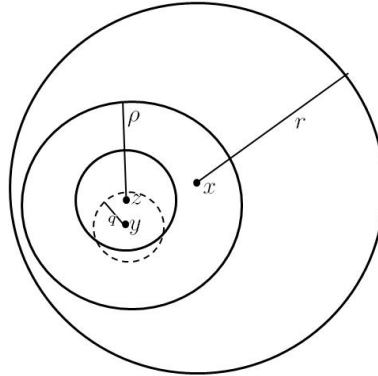


Figura 1.4: Proposizione 1.3.59

OSSERVAZIONE 1.3.60. (La retta di Sorgenfrey non è metrizzabile) L'Esempio 1.3.58 e la **Proposizione** 1.3.59 assicurano che la retta di Sorgenfrey non è metrizzabile. \square

1.4 Complementi

1.4.1 La topologia di Zariski di \mathbb{F}^n

Siano \mathbb{F} un campo infinito, X_1, X_2, \dots, X_n indeterminate e, posto

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

sia $\mathbb{F}[\mathbf{X}] = \mathbb{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ l'anello dei polinomi su \mathbb{F} in X_1, X_2, \dots, X_n . Ricordiamo che un elemento $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$ è uno **zero** di un polinomio $f(\mathbf{X}) \in \mathbb{F}[\mathbf{X}]$, o dell'equazione algebrica $f(\mathbf{X}) = 0$, se risulta $f(\mathbf{a}) = 0$. Un insieme di punti di \mathbb{F}^n prende il nome di **insieme algebrico**, o **varietà algebrica**, se è il luogo degli zeri di un sistema di equazioni algebriche. Se

$$S = \{f_i(\mathbf{X})\}_{i \in I}$$

è un insieme di polinomi di $\mathbb{F}[\mathbf{X}]$, denotiamo con $V(S)$ l'insieme algebrico luogo degli zeri del sistema

$$\{f_i(\mathbf{X}) = 0\}_{i \in I}, \quad (1.24)$$

poniamo cioè

$$V(S) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n : f_i(\mathbf{a}) = 0, \text{ per ogni } i \in I\}, \quad (1.25)$$

e diciamo che $V(S)$ è rappresentato dalle (1.24), o che le (1.24) sono le equazioni di $V(S)$. Vale il risultato fondamentale seguente.

PROPOSIZIONE 1.4.1. (Teorema della base di Hilbert) *Ogni sistema di equazioni algebriche a coefficienti in un campo \mathbb{F} è equivalente ad un sistema finito. Equivalentemente, ogni insieme algebrico può essere rappresentato da un numero finito di equazioni.* \square

Un sistema incompatibile, per esempio $\{X_1 = 0, X_1 = 1\}$, e un'identità, per esempio $\{0 = 0\}$, rappresentano rispettivamente l'insieme vuoto e l'intero spazio \mathbb{F}^n . Abbiamo così che:

(C1) *l'insieme vuoto e \mathbb{F}^n sono insiemi algebrici.*

Siano $X = V(S)$ e $Y = V(T)$ due insiemi algebrici rappresentati rispettivamente da S e T . Posto

$$W = \{f(\mathbf{X})g(\mathbf{X}) : f \in S \text{ e } g \in T\}$$

consideriamo l'insieme algebrico $Z = V(W)$. Un punto $\mathbf{a} \in X \cup Y$ è tale che $f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0$, per ogni $f \in S$ e $g \in T$, e quindi

$$X \cup Y \subseteq Z.$$

D'altra parte, se un punto $\mathbf{a} \in Z$ non appartiene a X (risp. a Y), esiste $\bar{f} \in S$ (risp. $\bar{g} \in T$) tale che $\bar{f}(\mathbf{a}) \neq 0$ (risp. $\bar{g}(\mathbf{a}) \neq 0$) e, dovendo essere $\bar{f}(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0$ per ogni $g \in T$ (risp. $f(\mathbf{a})\bar{g}(\mathbf{a}) = 0$ per ogni $f \in S$), risulta $\mathbf{a} \in Y$ (risp. $\mathbf{a} \in X$), e quindi

$$Z \subseteq X \cup Y.$$

Risulta dunque $Z = X \cup Y$ e abbiamo che:

(C2) *l'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico.*

Siano ora $\{V_i = V(S_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia di insiemi algebrici ove ogni V_i è rappresentato da S_i , per ogni $i \in \mathcal{I}$. Allora si ha subito che il sistema associato a $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i$ rappresenta l'intersezione degli insiemi algebrici V_i , al variare di $i \in \mathcal{I}$, cioè

$$V\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} S_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} V(S_i).$$

Ne segue che:

(C3) *l'intersezione di una famiglia di insiemi algebrici è un insieme algebrico.*

Gli insiemi algebrici di \mathbb{F}^n verificano dunque gli assiomi dei chiusi e, quindi, essi sono i chiusi di un'unica topologia su \mathbb{F}^n , che prende il nome di **topologia di Zariski** di \mathbb{F}^n . In questa topologia gli aperti sono i complementari degli insiemi algebrici.

PROPOSIZIONE 1.4.2. La topologia di Zariski di \mathbb{F}^n verifica le seguenti proprietà:

- ogni punto è chiuso;
- ogni insieme algebrico è intersezione di (un numero finito di) insiemi algebrici ciascuno dei quali è rappresentato da una sola equazione (**ipersuperfici algebriche**);
- i complementari delle ipersuperfici algebriche costituiscono una base.

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'uguaglianza

$$\{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)\} = V(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n),$$

per ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$, e dal **teorema della base di Hilbert**. □

PROPOSIZIONE 1.4.3. *Se l'unione di due insiemi algebrici $V(S)$ e $V(T)$ è \mathbb{F}^n , allora uno dei due insiemi coincide con \mathbb{F}^n .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $V(S) \cup V(T) = \mathbb{F}^n$. Nell'ipotesi $V(S) \neq \mathbb{F}^n$, esiste un polinomio $f(X) \in S$ non identicamente nullo. Allora, ogni $g(X) \in T$ è identicamente nullo perché è identicamente nullo il prodotto $f(X)g(X)$. Ne segue che $V(T) = \mathbb{F}^n$. Allo stesso modo si ragiona se si assume $V(T) \neq \mathbb{F}^n$ e l'asserto è completamente provato. □

Il corollario che segue è immediata conseguenza della proposizione precedente.

COROLLARIO 1.4.4. *Nella topologia di Zariski di \mathbb{F}^n , l'intersezione di due aperti non vuoti è non vuota.*

OSSERVAZIONE 1.4.5. La topologia di Zariski può definirsi anche quando \mathbb{F} è un campo finito. In questo caso si ottiene la topologia discreta su \mathbb{F}^n (provarlo per esercizio). □

1.4.2 Topologia di Zariski dello spettro di un anello

Sia \mathbb{A} un anello commutativo unitario e ricordiamo che un ideale proprio \mathfrak{p} di \mathbb{A} si dice **primo** se verifica la seguente proprietà:

$$a, b \in \mathfrak{p}, \quad a \notin \mathfrak{p} \Rightarrow b \in \mathfrak{p}.$$

Ricordiamo anche che, l'ideale nullo $(0) = \{0\}$ è primo se, e solo se, \mathbb{A} è un dominio di integrità.

Definiamo **spettro di \mathbb{A}** l'insieme $Spec(\mathbb{A})$ degli ideali primi di \mathbb{A} e, per ogni sottoinsieme X di elementi di \mathbb{A} , poniamo

$$V(X) = \{\mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{A}) : X \subseteq \mathfrak{p}\}. \quad (1.26)$$

Chiaramente risulta

$$V(X) = V((X)),$$

ove (X) denota l'ideale generato da X e, in particolare, se X stesso è un ideale \mathfrak{a} di \mathbb{A} , abbiamo

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec(\mathbb{A}) : \mathfrak{a} \leq \mathfrak{p}\}. \quad (1.27)$$

Risulta, inoltre,

$$X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A} \Rightarrow V(Y) \subseteq V(X).$$

Ricordiamo che, il **radicale di un ideale \mathfrak{a}** , che si denota con $rad(\mathfrak{a})$, è l'ideale definito da

$$rad(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathbb{A} : x^n \in \mathfrak{a}, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}^+\}$$

e chiaramente risulta $\mathfrak{a} \leq rad(\mathfrak{a})$. È possibile provare che $rad(\mathfrak{a})$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi di \mathbb{A} contenenti \mathfrak{a} .

PROPOSIZIONE 1.4.6. *Per ogni ideale \mathfrak{a} di \mathbb{A} risulta $V(\mathfrak{a}) = V(rad(\mathfrak{a}))$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathfrak{a} \leq rad(\mathfrak{a})$, risulta $V(rad(\mathfrak{a})) \subseteq V(\mathfrak{a})$. Ora, se $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ e prendiamo $x \in rad(\mathfrak{a})$, esiste un intero n tale che $x^n \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Poiché \mathfrak{p} è primo, abbiamo $x \in \mathfrak{p}$; quindi $rad(\mathfrak{a}) \leq \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p} \in V(rad(\mathfrak{a}))$. In conclusione risulta $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(rad(\mathfrak{a}))$ e l'asserto è provato. \square

OSSERVAZIONE 1.4.7. In forza della precedente proposizione abbiamo che la funzione $\mathfrak{a} \rightarrow V(\mathfrak{a})$ definita dalla (1.27) non è iniettiva e, per due ideali $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, risulta

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow rad(\mathfrak{a}) = rad(\mathfrak{b}).$$

OSSERVAZIONE 1.4.8. Sia \mathbb{F} un campo infinito. Se $\mathbb{A} = \mathbb{F}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ e, se Y è un insieme algebrico di \mathbb{F}^n , denotiamo con $I(Y)$ l'ideale dei polinomi di \mathbb{A} che si annullano su Y . Osserviamo che, se \mathbf{a} è un punto di \mathbb{F}^n , l'ideale $I(\mathbf{a})$ è un ideale primo, cioè un elemento di $\text{Spec}(\mathbb{A})$. Inoltre, se Y è un insieme algebrico in \mathbb{F}^n , il sottoinsieme $V(I(Y))$ di $\text{Spec}(\mathbb{A})$ contiene tutti gli ideali primi $I(\mathbf{a})$ di $\text{Spec}(\mathbb{A})$, per ogni $\mathbf{a} \in Y$. Nasce così la funzione che ad un punto \mathbf{a} di \mathbb{F}^n associa il punto $I(\mathbf{a})$ di $\text{Spec}(\mathbb{A})$ e, per ogni insieme algebrico Y in \mathbb{F}^n , risulta

$$\{I(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in Y\} \subseteq V(I(Y)).$$

Questa osservazione suggerisce di definire sullo spettro di un anello una topologia che in qualche modo generalizzi quella di Zariski di \mathbb{F}^n . Le proprietà di tale topologia, che fra poco vedremo si può effettivamente definire, sono di fondamentale importanza per la *geometria algebrica* e l'*algebra commutativa*. \square

PROPOSIZIONE 1.4.9. La famiglia $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$ dei sottoinsiemi di $\text{Spec}(\mathbb{A})$ della forma $V(\mathbf{a})$, con \mathbf{a} ideale di \mathbb{A} , verifica gli assiomi dei chiusi.

DIMOSTRAZIONE. Risulta $V(0) = \text{Spec}(\mathbb{A})$ e $V(\mathbb{A}) = \emptyset$ e, quindi, l'insieme vuoto e $\text{Spec}(\mathbb{A})$ sono elementi di $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$.

Se $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di ideali di \mathbb{A} , risulta

$$\mathbf{p} \in \bigcap_{j \in J} V(\mathbf{a}_j) \Leftrightarrow \mathbf{p} \in V(\mathbf{a}_j), \forall j \in J \Leftrightarrow \mathbf{a}_j \subseteq \mathbf{p}, \forall j \in J \Leftrightarrow \mathbf{p} \in V\left(\left(\bigcup_{j \in J} \mathbf{a}_j\right)\right),$$

così l'intersezione di una famiglia di elementi di $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$ appartiene a $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$.

Siano \mathbf{a}, \mathbf{b} due ideali di \mathbb{A} , $\mathbf{p} \in \text{Spec}(\mathbb{A})$ e supponiamo

$$\mathbf{p} \in V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b}), \quad \mathbf{p} \notin V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}).$$

Osserviamo che da $\mathbf{p} \notin V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$, abbiamo $\mathbf{a} \not\subseteq \mathbf{p}$, $\mathbf{b} \not\subseteq \mathbf{p}$ e, quindi, esistono un elemento $a \in \mathbf{a} \setminus \mathbf{p}$, un elemento $b \in \mathbf{b} \setminus \mathbf{p}$ e $ab \in \mathbf{a} \cap \mathbf{b}$. D'altra parte, da $\mathbf{p} \in V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b})$, abbiamo $ab \in \mathbf{p}$ e, essendo \mathbf{p} primo, o $a \in \mathbf{p}$ o $b \in \mathbf{p}$, il che è assurdo in forza dell'osservazione precedente. Ciò prova che, se $\mathbf{p} \in V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b})$ allora $\mathbf{p} \in V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$, cioè

$$V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b}) \subseteq V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}).$$

Ora, se supponiamo $\mathbf{p} \in V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b})$, abbiamo $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{p}$, $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{p}$ e, quindi, $\mathbf{p} \in V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b})$, cioè

$$V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) \subseteq V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b}).$$

Resta allora provato che

$$V(\mathbf{a}) \cup V(\mathbf{b}) = V(\mathbf{a} \cap \mathbf{b})$$

e così l'intersezione di due elementi di $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$ appartiene a $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}$. \square

La topologia di $\text{Spec}(\mathbb{A})$ definita dalla proposizione precedente prende il nome di **topologia di Zariski di $\text{Spec}(\mathbb{A})$** o **topologia spettrale di \mathbb{A}** . Naturalmente, gli aperti di tale topologia sono i sottoinsiemi di $\text{Spec}(\mathbb{A})$ i cui complementari sono del tipo (1.27).

Per ogni $x \in \mathbb{A}$, l'insieme

$$B_x = \text{Spec}(\mathbb{A}) \setminus V((x)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbb{A}) : x \notin \mathfrak{p}\},$$

è un aperto e, per ogni ideale \mathfrak{a} di \mathbb{A} , risulta

$$\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbb{A}) \setminus V(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p} \Leftrightarrow \text{esiste } x \in \mathfrak{a} : x \notin \mathfrak{p}, \text{ cioè } \mathfrak{p} \in B_x \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \bigcup_{x \in \mathfrak{a}} B_x,$$

cioè

$$\text{Spec}(\mathbb{A}) \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{x \in \mathfrak{a}} B_x.$$

Da quanto appena osservato segue facilmente la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.4.10. *La famiglia $\{B_x\}_{x \in \mathbb{A}}$ è una base per la topologia di Zariski di $\text{Spec}(\mathbb{A})$.*

ESEMPIO 1.4.11. Ogni campo \mathbb{F} contiene un unico ideale: l'ideale nullo (0) . Abbiamo dunque $\text{Spec}(\mathbb{F}) = \{(0)\}$.

ESEMPIO 1.4.12. L'anello \mathbb{Z} degli interi relativi è un dominio di integrità ad ideali principali, quindi l'ideale nullo è primo e ogni ideale di \mathbb{Z} è del tipo

$$(n) = \{hn : h \in \mathbb{Z}\},$$

ove n è un fissato intero; in particolare abbiamo $(0) = \{0\}$ e $(1) = \mathbb{Z}$. Inoltre, gli ideali primi non nulli sono tutti e soli quelli del tipo (p) , con p primo; pertanto

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{(p) : \text{con } p \text{ primo}\}$$

e, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$V(n) = \{(p) : p \text{ divide } n\}.$$

Quanto appena osservato assicura che $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ è l'unico chiuso della topologia spettrale di \mathbb{Z} che contiene propriamente l'ideale nullo. Allora la chiusura del singleton $\{(0)\}$ è $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ e i sottoinsiemi densi di $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ sono tutti e soli quelli che contengono $\{(0)\}$. Ne segue che l'ideale nullo appartiene a qualsiasi aperto non vuoto e, di conseguenza, *la topologia in esame è irriducibile.* \square

ESERCIZIO 1.4.13. Provare che la topologia di Zariski dello spettro di un dominio di integrità è irriducibile. \square

1.4.3 Alcuni assiomi di separazione

Molte proprietà di ampie classi di spazi topologici dipendono dalla possibilità di "separare" i propri punti mediante gli aperti ed è appunto in quest'ambito che s'inquadrano gli argomenti che tratteremo nel presente numero.

DEFINIZIONE 1.4.14. Sia X uno spazio topologico. Si dice che X è

- **uno spazio T_0** se, per ogni coppia di punti distinti di X , esiste un intorno di uno dei due che non contiene l'altro (*assioma, o proprietà, di separazione T_0 o di Kolmogoroff*);
- **uno spazio T_1** se, per ogni coppia di punti distinti a, b di X , esiste un intorno di a non contenente b e uno di b non contenente a (*assioma, o proprietà, di separazione T_1 o di Fréchet*);
- **uno spazio T_2** se, per ogni coppia di punti a, b distinti di X , esistono un intorno di a e uno di b ad intersezione vuota (*assioma, o proprietà, di separazione T_1 o di Hausdorff*). □

ESEMPI 1.4.15. (Spazi non T_0) In uno spazio metrico (X, d) le sfere aperte con centro un fissato punto a sono gli aperti non banali della topologia del tiro a bersaglio su X (cfr. **Esempio 1.3.19**). Allora, se due punti distinti sono ad una stessa distanza $r > 0$ da a , ogni intorno che ne contenga uno contiene anche l'altro. Ne segue che tale topologia non è T_0 .

La topologia banale e la topologia con tre aperti danno ulteriori esempi di topologie che non sono T_0 . □

ESEMPIO 1.4.16. (Uno spazio T_0) Consideriamo la topologia di Zariski di un anello commutativo unitario \mathbb{A} (cfr. **Paragrafo 1.4.2**) e siano $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ due ideali primi distinti e, senza perdita di generalità, supponiamo $\mathfrak{p}_2 \not\subseteq \mathfrak{p}_1$. Allora esiste un elemento $x \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$, cioè $\mathfrak{p}_1 \in B_x$ e $\mathfrak{p}_2 \notin B_x$. Abbiamo così trovato un aperto che contiene \mathfrak{p}_1 e non \mathfrak{p}_2 e, quindi, la topologia in esame è T_0 .

Si osservi che, nelle nostre ipotesi, se fosse $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$, non esisterebbe alcun aperto contenente \mathfrak{p}_2 e non \mathfrak{p}_1 . □

PROPOSIZIONE 1.4.17. ($T_1 \Leftrightarrow$ punti chiusi) Uno spazio topologico X è T_1 se, e solo se, ogni suo punto è chiuso.

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che X sia T_1 , consideriamo un suo punto a . Allora, ogni punto $b \neq a$ appartiene ad un intorno contenuto in $X \setminus \{a\}$ e, quindi, questo insieme è aperto. Da ciò segue che $\{a\}$ è un chiuso. Viceversa, se ogni punto di X è chiuso e $a, b \in X$ sono punti distinti, allora $X \setminus \{a\}$ è un intorno di b non contenente a e $X \setminus \{b\}$ è un intorno di a non contenente b . Abbiamo così che X è T_1 . □

ESEMPI 1.4.18. (Spazi T_1) In forza della precedente proposizione risultano T_1 le seguenti topologie:

- la topologia associata ad uno spazio metrico e quindi, in particolare, la topologia naturale di \mathbb{R}^n ;
- la topologia della retta di Sorgenfrey;
- la topologia di Zariski;
- la topologia cofinita;
- la topologia discreta. □

È immediato rendersi conto che *ogni spazio T_2 è anche T_1 e che ogni spazio T_1 è anche T_0* . Queste due implicazioni non possono invertirsi, come provano gli esempi che seguono.

ESEMPI 1.4.19. (Spazi T_0 e non T_1) La topologia di \mathbb{R} delle semirette sinistre aperte e la topologia spettrale di un dominio di integrità (*cf.* **Esercizio 1.4.13**) sono T_0 e non sono T_1 . □

ESEMPI 1.4.20. (Spazi T_1 e non T_2) La topologia di Zariski e la topologia cofinita su un insieme infinito sono T_1 e non sono T_2 . □

ESEMPI 1.4.21. (Spazi T_2) Gli spazi metrici (in particolare \mathbb{R}^n con la topologia naturale), la retta di Sorgenfrey e gli spazi discreti sono T_2 . □

PROPOSIZIONE 1.4.22. *Sia X uno spazio topologico T_1 i cui aperti non vuoti siano infiniti. Sia y un punto di accumulazione per un sottoinsieme Y di X . Allora, per ogni aperto A contenente y , l'insieme $A \cap Y$ è infinito (in particolare questo risultato vale in \mathbb{R}^n con la topologia naturale).*

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto contenente y , esiste un punto $y_1 \in A \cap Y$ diverso da y e possiamo definire l'insieme

$$A_1 = A \setminus \{y_1\} = A \cap (X \setminus \{y_1\}),$$

che è un aperto in quanto intersezione di due aperti. Poiché $y \in A_1$, esiste un punto $y_2 \in A_1$ diverso da y, y_1 e possiamo definire l'insieme

$$A_2 = A \setminus \{y_1, y_2\} = A \cap (X \setminus \{y_1, y_2\}),$$

che è un aperto contenente y . Ora, continuando in questo modo, possiamo costruire per induzione l'insieme infinito $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ di punti di $A \cap Y$. □

1.4.4 Successioni

Se X è uno spazio topologico e N un sottoinsieme numerabile dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali denotiamo con $\{x_n\}_{n \in N}$, o semplicemente con $\{x_n\}$, una successione di suoi punti. Ricordiamo che la successione $\{x_n\}_{n \in N}$ non è altro che la funzione $n \in N \rightarrow x_n \in X$ e avvertiamo che, tranne esplicito avviso, assumeremo $N = \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 1.4.23. (Successioni convergenti) Una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio topologico X si dice **convergente ad un punto** $\ell \in X$ se, per ogni intorno U di ℓ , esiste un intero positivo m tale che, per ogni $n > m$, risulta $x_n \in U$. In questo caso ℓ prende il nome di **limite** della successione $\{x_n\}$ e si scrive $x_n \rightarrow \ell$. \square

OSSERVAZIONE 1.4.24. È facile rendersi conto che il limite di una successione $\{x_n\}$ è punto di aderenza per l'insieme degli elementi della successione stessa, in particolare è di accumulazione se non appartiene a questo insieme. Non è invece vero che un punto di aderenza per l'insieme dei punti di $\{x_n\}$ sia necessariamente un limite della successione, come mostra il seguente esempio. La successione di \mathbb{R} definita da

- $x_n = \frac{1}{n}$, per $n \neq 0$ pari,
- $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, per n dispari

ha 0 e 1 come punti di accumulazione e nessuno dei due è limite della successione, come facilmente si prova. \square

PROPOSIZIONE 1.4.25. (Unicità del limite negli spazi T_2) In uno spazio topologico T_2 una successione convergente ammette un unico limite.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che una successione $\{x_n\}$ di uno spazio T_2 abbia due limiti distinti ℓ, ℓ' e siano U, U' rispettivamente un intorno di ℓ e uno di ℓ' ad intersezione vuota. Allora, esistono due interi positivi m, m' tali che per $n > m$, $x_n \in U$ e per $n > m'$, $x_n \in U'$. Ora, per $n > m, m'$, risulta $x_n \in U$ e $x_n \in U'$; ciò è assurdo essendo U e U' disgiunti. \square

DEFINIZIONE 1.4.26. (Successioni di Cauchy) Una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se, per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un intero positivo m tale che $d(x_p, x_q) < \epsilon$, per ogni $p, q > m$. \square

PROPOSIZIONE 1.4.27. (Le successioni convergenti sono di Cauchy) In uno spazio metrico X ogni successione convergente è di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{x_n\}$ sia una successione di X convergente ad un punto ℓ e fissiamo un numero reale $\epsilon > 0$. Allora esiste un intero m tale che $x_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\ell)$, per ogni $n > m$. Ne segue che

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \ell) + d(\ell, x_q) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

per ogni $p, q > m$. Abbiamo così che $\{x_n\}$ è di Cauchy. \square

ESEMPIO 1.4.28. (Successioni di Cauchy non convergenti) La successione $\{\frac{1}{n}\}$ della retta euclidea converge a 0 e quindi è di Cauchy. La stessa successione quindi, considerata come successione di \mathbb{R}^+ con la topologia indotta da quella della retta euclidea, è ancora di Cauchy ma non è convergente. \square

DEFINIZIONE 1.4.29. (Spazi metrici completi) Uno spazio metrico X si dice **completo** se ogni sua successione di Cauchy è convergente. Un sottoinsieme Y di X si dice completo se è tale rispetto alla metrica indotta in esso da quella di X . \square

ESEMPIO 1.4.30. (Completezza di \mathbb{R}^n) È noto dai corsi di analisi matematica che ogni successione di Cauchy di \mathbb{R}^n è convergente. \mathbb{R}^n (in particolare la retta euclidea) è dunque un esempio di spazio metrico completo. \square

PROPOSIZIONE 1.4.31. (Sottospazi completi e insiemi chiusi) Sia X uno spazio metrico completo. Un sottospazio Y di X è completo se, e solo se, Y è un chiuso di X .

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che Y sia completo, sia $y \in \overline{Y}$ e, per ogni intero positivo n , scegliamo un punto $x_n \in Y \cap B_{\frac{1}{n}}(y)$. La successione $\{x_n\}$ converge evidentemente a y , quindi è di Cauchy e, per la completezza di Y , abbiamo $y \in Y$. Allora risulta $Y = \overline{Y}$ e Y è chiuso.

Viceversa, assumiamo che Y sia chiuso e consideriamo una successione di Cauchy $\{x_n\}$ di suoi punti. Per la completezza di X , abbiamo che $\{x_n\}$ converge ad un punto $y \in X$; inoltre ogni intorno U di y contiene punti di $\{x_n\}$ e quindi di Y . Ne segue che y è aderente a Y e, essendo Y chiuso, risulta $y \in Y$. Abbiamo così che Y è completo. \square

OSSERVAZIONE 1.4.32. In uno spazio metrico la proprietà di una successione di essere di Cauchy e la completezza sono proprietà metriche (dimostrarlo per esercizio). \square

1.5 Funzioni continue e omeomorfismi

In questo paragrafo generalizziamo agli spazi topologici la nozione di *continuità*, già introdotta e discussa nel caso degli spazi metrici.

DEFINIZIONE 1.5.1. (Funzioni continue) Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in un punto $a \in X$ se, per ogni intorno V di $f(a)$ in Y , esiste un intorno U di a in X tale che $f(U) \subseteq V$. La funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **continua** in X se è continua in ogni punto di X . \square

Nel seguito per indicare una funzione f tra i sostegni di due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) useremo anche la notazione $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$.

OSSERVAZIONE 1.5.2. È chiaro che, se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono spazi metrizzabili rispettivamente con le metriche d_X, d_Y , la definizione precedente si riduce a quella di funzione continua tra spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y) (cfr. **Definizione 1.2.7**). In particolare risultano continue secondo quest'ultima definizione le funzioni continue tra gli spazi euclidei \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m studiate nei corsi di analisi matematica (cfr. **Definizione 1.2.1**). \square

ESEMPIO 1.5.3. Risultano continue:

- tutte le funzioni tra un qualunque spazio topologico e uno spazio banale;
- tutte le funzioni tra uno spazio discreto e un qualunque spazio topologico;
- l'**immersione** $i : a \in Y \rightarrow a \in X$ di un sottospazio Y di X in X ;
- l'**identità** $i : a \in X \rightarrow a \in X$ di (X, τ) in (X, σ) con σ meno fine di τ ;

PROPOSIZIONE 1.5.4. (Caratterizzazioni delle funzioni continue) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra i sostegni dei due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) . Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) f è continua;
- (ii) la controimmagine $f^{-1}(A)$ di ogni aperto A di Y è un aperto di X ;
- (iii) la controimmagine $f^{-1}(C)$ di ogni chiuso C di Y è un chiuso di X ;
- (iv) le controimmagini degli aperti di una fissata base di Y sono aperti di X ;
- (v) per ogni punto $b = f(a) \in f(X)$, la controimmagine $f^{-1}(U')$ di ogni intorno U' di $b \in Y$ di un sistema fondamentale di intorni di Y è un intorno di a in X .

DIMOSTRAZIONE. (i) \Leftrightarrow (ii): Se f è continua e A un aperto di Y , sia a un arbitrario punto di $f^{-1}(A)$. Poiché A è un intorno di $f(a)$, esiste un intorno U di a tale che $f(U) \subseteq A$. Ne segue che U è contenuto in $f^{-1}(A)$ e, così, $f^{-1}(A)$ è aperto. Ora, nell'ipotesi (ii), siano $a \in X$ e U un intorno di $f(a)$. Detto A un aperto di Y contenente $f(a)$ e contenuto in U , si ha che $f^{-1}(A)$ è un intorno (perché aperto) di a la cui immagine mediante f è contenuta in U . Ne segue che f è continua.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Se vale la (ii) e C è un chiuso di Y , allora $\mathcal{C}(C)$ è un aperto in Y e $f^{-1}(\mathcal{C}(C))$ un aperto in X . Da ciò segue che $f^{-1}(C) = \mathcal{C}(f^{-1}(\mathcal{C}(C)))$ è un chiuso di X . In modo analogo si vede che da (iii) segue (ii).

La dimostrazione delle altre equivalenze è lasciata al Lettore. \square

ESERCIZIO 1.5.5. Siano X, Y due insiemi non vuoti e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Provare che:

- se σ è una topologia su Y , la topologia $f^{-1}(\sigma) = \{f^{-1}(A) : A \in \sigma\}$ indotta su X da f (cfr. **1.3.13**) è la più fine tra le topologie su X per cui f è continua;
- se τ è una topologia su X , la topologia $\tau_f = \{T \subseteq Y : f^{-1}(T) \in \tau\}$ indotta su Y da f (cfr. **1.3.14**) è la più fine tra le topologie su Y per cui f è continua. \square

ESEMPIO 1.5.6. (La topologia di Zariski di \mathbb{R}^n è meno fine di quella naturale) Se $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ è un polinomio in n variabili a coefficienti reali, la *funzione polinomiale* associata

$$f : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$$

è continua rispetto alle topologie naturali di \mathbb{R}^n e \mathbb{R} . Ne segue che l'ipersuperficie algebrica di \mathbb{R}^n definita da

$$f^{-1}(0) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0\}$$

è un chiuso di \mathbb{R}^n con la topologia naturale (perché controimmagine di un chiuso mediante una funzione continua) e di conseguenza sono chiuse tutte le loro intersezioni, cioè gli insiemi algebrici (cfr. **Proposizione 1.4.2**). Ne segue che la topologia di Zariski di \mathbb{R}^n è meno fine della topologia naturale. \square

ESERCIZIO 1.5.7. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione iniettiva e continua tra gli spazi topologici X e Y . Provare che se Y è uno spazio T_j , $j = 0, 1, 2$, allora anche X è uno spazio T_j .

PROPOSIZIONE 1.5.8. (Funzioni continue e aderenza) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra i sostegni dei due spazi topologici (X, τ_X) e (Y, τ_Y) è continua se, e solo se, per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$, trasforma punti aderenti a T in punti aderenti a $f(T)$, cioè $f(\overline{T}) \subseteq \overline{f(T)}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo f continua e sia a un punto aderente a T . Allora, per ogni aperto A' di Y contenente $f(a)$, $A = f^{-1}(A')$ è un aperto di X contenente a e $A \cap T$ contiene almeno un punto b . Ne segue che $A' \cap f(T) \neq \emptyset$, essendo $f(b) \in A' \cap f(T)$, e quindi $f(a)$ è aderente a $f(T)$.

Viceversa, supponiamo $f(\overline{T}) \subseteq \overline{f(T)}$, per ogni sottoinsieme $T \subseteq X$. Detto C' un chiuso di Y , poniamo $C = f^{-1}(C')$ e osserviamo che da $f(C) \subseteq C'$ segue $\overline{f(C)} \subseteq C'$, perché C' è un chiuso. Allora, essendo $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)} \subseteq C'$, risulta $\overline{C} \subseteq f^{-1}(C') = C$, così C è chiuso e f è continua. \square

PROPOSIZIONE 1.5.9. (Funzioni continue e convergenza di successioni) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua tra gli spazi topologici X e Y . Se $\{x_n\}$ è una successione di punti di X convergente ad un punto ℓ , la successione $\{f(x_n)\}$ di punti di Y converge al punto $f(\ell)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia U' un intorno di $f(\ell)$ in Y e consideriamo l'intorno $U = f^{-1}(U')$ di ℓ in X . Allora, esiste un intero positivo m tale che, per ogni $n > m$, $x_n \in U$ e quindi $f(x_n) \in U'$. Ne segue che $\{f(x_n)\}$ converge ad $f(\ell)$. \square

PROPOSIZIONE 1.5.10. (Composizione di funzioni continue) Siano X, Y , e T spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funzioni continue. Allora, la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua. \square

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto A di T , $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y perché g è continua e, quindi, essendo continua anche f , $f^{-1}(g^{-1}(A))$ è un aperto di X . D'altra parte, risulta $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ e da ciò segue che $g \circ f$ è continua. \square

DEFINIZIONE 1.5.11. (Omeomorfismi) Siano X e Y spazi topologici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **omeomorfismo** se valgono le seguenti proprietà:

- f è biunivoca;
- le funzioni $f : X \rightarrow Y$ e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sono continue. \square

ESEMPIO 1.5.12. (Le isometrie sono omeomorfismi) Sia $f : X \rightarrow Y$ un'isometria tra gli spazi metrici X e Y . Allora f deve essere biunivoca. Inoltre, in forza dell'Esempio 1.3.25 e della Proposizione 1.5.4-(iv) le funzioni f e f^{-1} risultano continue. Ne segue che ogni isometria è anche un omeomorfismo. \square

ESERCIZIO 1.5.13. Siano $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo tra gli spazi topologici X, Y e a un punto di X . Provare che la restrizione di f a $X \setminus \{a\}$ è un omeomorfismo tra $X \setminus \{a\}$ e $Y \setminus \{f(a)\}$. \square

Siano X, Y e T spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ omeomorfismi. È facile verificare che:

- (H1) la funzione identità di X è un omeomorfismo di X sé;
- (H2) la funzione inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ dell'omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo di Y in X ;
- (H3) la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ dei due omeomorfismi f e g è un omeomorfismo di X in Z .

Le tre precedenti proprietà assicurano che la relazione

$$"X \simeq Y \text{ se esiste un omeomorfismo di } X \text{ su } Y"$$

è una relazione d'equivalenza nella classe di tutti gli spazi topologici. Due spazi topologici di una stessa classe di omeomorfismo si dicono **omeomorfi**. L'insieme degli omeomorfismi di uno spazio topologico X in se stesso, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, risulta un gruppo che si chiama **gruppo degli omeomorfismi** di X e si denota con $H(X)$.

ESERCIZIO 1.5.14. Provare che sono invarianti per omeomorfismi le seguenti nozioni: *base, intorno, sistema fondamentale di intorni, chiusura, interno, punto di aderenza, punto isolato, punto di accumulazione, proprietà \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 , separabilità, proprietà T_0, T_1, T_2 .* \square

Le **proprietà topologiche** di uno spazio topologico (X, τ) sono le proprietà di X invarianti per omeomorfismi, ovvero invarianti rispetto al gruppo $H(X)$. Si ha, dunque, che ogni proprietà topologica di X è tale in un qualsiasi spazio omeomorfo a X . Quanto detto ci permette di identificare due spazi topologici che siano omeomorfi; in altre parole, lo studio degli spazi topologici si fa a meno di omeomorfismi.

1.5.1 Proprietà topologiche di uno spazio metrico

Sia (X, d) uno spazio metrico. Le proprietà della topologia τ_d associata a d si dicono **proprietà topologiche di X** . Poiché un'isometria tra due spazi metrici è anche un omeomorfismo, come osservato nell'**Esempio 1.5.12**, si ha che *ogni proprietà invariante per omeomorfismi è invariante anche per isometrie*. Di contro, vedremo che *esistono proprietà invarianti per isometrie ma non per omeomorfismi*. In altre parole: *le proprietà topologiche sono anche metriche, ma non è vero il contrario*.

Due spazi metrici si dicono **topologicamente equivalenti** se sono omeomorfi rispetto alle loro topologie associate; in questo caso le rispettive metriche si dicono **equivalenti**. Quanto prima osservato assicura che spazi metrici isometrici sono topologicamente equivalenti ma, in generale, non è vero il viceversa. Può, infatti, accadere che metriche diverse su uno stesso insieme diano luogo ad una stessa topologia. Una condizione necessaria e sufficiente affinché due metriche sullo stesso insieme siano equivalenti è espressa dalla seguente proposizione, la cui semplice dimostrazione è lasciata al Lettore.

PROPOSIZIONE 1.5.15. *Due metriche d e d' su un insieme X individuano la stessa topologia, cioè $\tau_d = \tau_{d'}$, se e solo se:*

- *l'insieme degli intorni sferici aperti nella metrica d è una base della topologia $\tau_{d'}$;*
- *l'insieme degli intorni sferici aperti nella metrica d' è una base della topologia τ_d .*

ESEMPIO 1.5.16. Sia (X, d) uno spazio metrico non limitato. Abbiamo osservato che le metriche d' e d''' su X degli **Esempi 1.2.30** sono limitate e, quindi, (X, d) e $(X, d'), (X, d''')$ non sono isometrici. È facile, però, rendersi conto che d e d', d''' sono equivalenti. Abbiamo così che *la proprietà di uno spazio metrico di essere limitato è metrica ma non topologica*. \square

1.5.2 Complementi ed esempi

Un sottoinsieme J di \mathbb{R} prende il nome di **intervallo** se, per ogni due suoi punti a, b con $a < b$, l'intervallo chiuso $[a, b]$ è contenuto in J . È un esercizio provare la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.5.17. *Gli intervalli di \mathbb{R} sono tutti e soli gli insiemi dei seguenti tipi:*

$$\emptyset, \mathbb{R}, [a, b], [a, b), (a, b], (a, b), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, a], (-\infty, a),$$

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

ESERCIZIO 1.5.18. Provare che gli estremi di un intervallo limitato J di \mathbb{R} sono punti di accumulazione di J . \square

ESEMPIO 1.5.19. (Omeomorfismi tra intervalli limitati di \mathbb{R}) Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} . La funzione lineare $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definita da

$$f(x) = (b - a)x + a \tag{1.28}$$

è invertibile e la sua inversa f^{-1} è definita da

$$f^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $[0, 1]$ e $[a, b]$. Da notare che, essendo $f(0) = a$ e $f(1) = b$, le restrizioni di f a $[0, 1)$, $(0, 1]$ e $(0, 1)$ sono omeomorfismi tra tali intervalli e $[a, b)$, $(a, b]$ e (a, b) , rispettivamente. Anche la funzione $g : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definita da

$$g(x) = (a - b)x + b \tag{1.29}$$

è un omeomorfismo tra $[0, 1]$ e $[a, b]$ e risulta $g(0) = b$ e $g(1) = a$. Ne segue che le restrizioni di g a $[0, 1)$ e $(0, 1]$ sono omeomorfismi tra tali intervalli e $(a, b]$ e $[a, b)$, rispettivamente. \square

OSSERVAZIONE 1.5.20. Gli omeomorfismi (1.28) e (1.29) sono gli unici omeomorfismi lineari tra $[0, 1]$ e $[a, b]$.

ESEMPIO 1.5.21. (Omeomorfismi tra intervalli non limitati di \mathbb{R}) Si consideri l'intervallo $[a, +\infty)$ di \mathbb{R} . La funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow [a, +\infty)$ definita da

$$f(x) = x + a$$

è invertibile e la sua inversa f^{-1} è definita da

$$f^{-1}(x) = x - a.$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $[0, +\infty)$ e $[a, +\infty)$. Da notare che, essendo $f(0) = a$, la restrizione di f a $(0, +\infty)$ è un isomorfismo tra tale intervallo e $(a, +\infty)$. Anche la funzione $g : (-\infty, 0] \rightarrow [a, +\infty)$ definita da

$$g(x) = a - x$$

è un omeomorfismo tra $(-\infty, 0]$ e $[a, +\infty)$ e risulta $g(0) = a$. Ne segue che la restrizione di g a $(-\infty, 0)$ è un isomorfismo tra tale intervallo e $(a, +\infty)$. \square

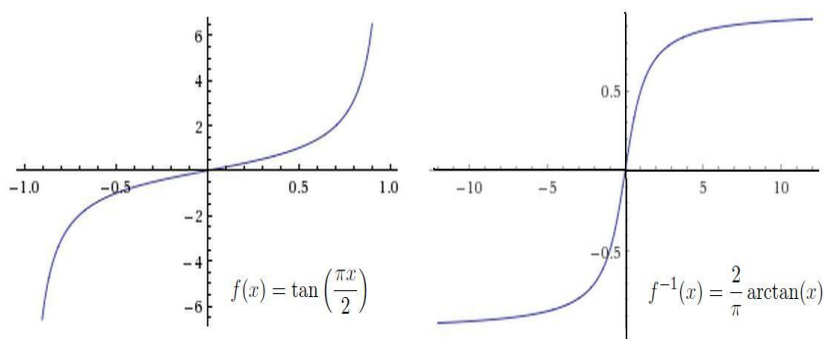


Figura 1.5: Esempio 1.5.22

ESEMPIO 1.5.22. (Omeomorfismi tra intervalli limitati e non limitati di \mathbb{R}) La funzione

$$f : x \in (-1, 1) \rightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arctan(x) \in (-1, 1).$$

Poiché f e f^{-1} sono continue, si ha che f è un omeomorfismo tra $(-1, 1)$ e \mathbb{R} . La restrizione di f a $[0, 1)$ è un omeomorfismo tra $[0, 1)$ e $[0, +\infty)$. La restrizione di f a $(0, 1)$ è un omeomorfismo tra $(0, 1)$ e $(0, +\infty)$. \square

OSSERVAZIONE 1.5.23. (La completezza di uno spazio metrico non è una proprietà topologica) In forza dell'esempio precedente, un intervallo limitato (a, b) è omeomorfo a \mathbb{R} . D'altra parte, come spazi metrici, (a, b) non è completo mentre \mathbb{R} lo è. Questo prova che la completezza di uno spazio metrico, che è una proprietà metrica, non è una proprietà topologica. \square

ESEMPIO 1.5.24. (Omeomorfismi tra intervalli non limitati di \mathbb{R} e \mathbb{R}) Le funzioni biunivoche $\exp : x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in (0, +\infty)$ e $\log : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log x \in \mathbb{R}$ sono l'una l'inversa dell'altra e continue e, quindi, $(0, +\infty)$ e \mathbb{R} sono omeomorfismi. \square

PROPOSIZIONE 1.5.25. In \mathbb{R} , con la topologia naturale, si ha che:

- intervalli dello stesso tipo sono omeomorfi;
- intervalli del tipo $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ sono tra loro omeomorfi;
- intervalli del tipo (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ sono tra loro omeomorfi e omeomorfi a \mathbb{R} .

DIMOSTRAZIONE. È una semplice conseguenza dei quattro esempi precedenti. \square

ESEMPIO 1.5.26. (Omeomorfismi tra circonferenze e poligoni regolari) Nel piano euclideo \mathbb{R}^2 siano X e Y rispettivamente i punti di una circonferenza e di un poligono regolare con lo stesso centro C . Per ogni punto A diverso da C , denotiamo con $\sigma(C, A)$ la semiretta di origine C passante per A . La funzione

$$f : A \in X \rightarrow A' = Y \cap \sigma(C, A) \in Y$$

è invertibile e la sua inversa è definita da

$$f^{-1} : A \in Y \rightarrow X \cap \sigma(C, A) \in X.$$

Le funzioni f e f^{-1} trasformano tra loro le basi di X e Y costituite dalle intersezioni dei cerchi aperti di \mathbb{R}^2 con X e Y stessi e, di conseguenza, sono continue. Così f è un omeomorfismo tra X e Y . Allo stesso modo si vede che sono tra loro omeomorfi due poligoni regolari e due circonferenze. \square

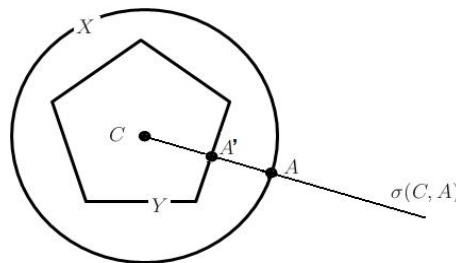


Figura 1.6: Esempio 1.5.26

ESEMPIO 1.5.27. (Omeomorfismi tra superfici sferiche e poliedri convessi) Generalizzando l'Esempio 1.5.26, si prova che nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 le superfici sferiche e i poliedri convessi appartengono ad una stessa classe di omeomorfismo. Analogamente, si può provare che due superfici sferiche di \mathbb{R}^n sono tra loro omeomorfe. \square

ESEMPIO 1.5.28. (Proiezione stereografica) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 siano S e Y rispettivamente i punti di una superficie sferica di centro un punto C e di un piano tangente a X in un punto T .

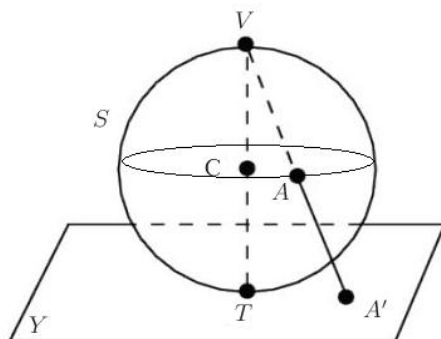


Figura 1.7: Esempio 1.5.28

Siano \mathcal{B}_X la base di X e \mathcal{B}_Y la base di Y ottenute intersecando gli interni sferici aperti di \mathbb{R}^3 rispettivamente con X e Y . Detto V il punto di S diametralmente opposto a T , poniamo $X = S \setminus \{V\}$ e, per ogni punto $A \in X$, denotiamo con A' il punto di intersezione della retta passante per V e A con il piano Y . La funzione biunivoca

$$f : A \in X \rightarrow A' \in Y \quad (1.30)$$

prende il nome di **proiezione stereografica della sfera**. La proiezione stereografica f e la sua inversa f^{-1} trasformano rispettivamente un elemento di \mathcal{B}_X in un aperto di Y e un elemento di \mathcal{B}_Y in un aperto di X e, di conseguenza, sono continue. Così f è un omeomorfismo tra X e Y . Resta dunque provato che *una superficie sferica meno un punto in \mathbb{R}^3 e il piano euclideo \mathbb{R}^2 sono omeomorfi*. Se consideriamo la restrizione di f a $S \setminus \{V, T\} = X \setminus \{T\}$ otteniamo un omeomorfismo tra $X \setminus \{T\}$ e $Y \setminus \{T\}$. Abbiamo, così, che *una superficie sferica di \mathbb{R}^3 meno due punti è omeomorfa al piano euclideo \mathbb{R}^2 meno un punto*. Questi esempi sono una riprova del fatto che la limitatezza di un sottospazio di \mathbb{R}^n è una proprietà metrica ma non topologica. Per ogni $n > 0$, la proiezione stereografica si può definire, come nel caso $n = 3$, per una superficie sferica di \mathbb{R}^n e, in questo modo, si ottiene un omeomorfismo tra la superficie sferica di \mathbb{R}^n meno un punto (risp. meno due punti) e lo spazio euclideo \mathbb{R}^{n-1} (risp. meno un punto). In particolare si ha che *una circonferenza meno un punto è omeomorfa alla retta reale*. \square

ESEMPIO 1.5.29. (Omeomorfismi tra superfici sferiche meno due punti e cilindri) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 siano X e Y rispettivamente i punti di una superficie sferica S , di centro un punto C , meno due punti V, T e di un cilindro circolare retto (non limitato) Y disposti come in **Figura 1.8**. Siano \mathcal{B}_X la base di X e \mathcal{B}_Y

la base di Y ottenute intersecando gli interni sferici aperti di \mathbb{R}^3 rispettivamente con X e Y . Per ogni punto $A \in X$, denotiamo con A' il punto di intersezione della semiretta di origine C passante per A col cilindro Y . La funzione biunivoca

$$f : A \in X \rightarrow A' \in Y$$

e la sua inversa f^{-1} trasformano rispettivamente un elemento di \mathcal{B}_X in un aperto di Y e un elemento di \mathcal{B}_Y in un aperto di X e, di conseguenza, sono continue.

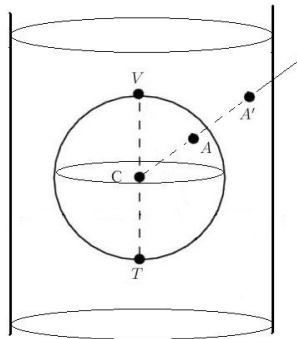


Figura 1.8: Esempio 1.5.29

Così f è un omeomorfismo tra X e Y . Resta dunque provato che una superficie sferica meno due punti in \mathbb{R}^3 e un cilindro circolare sono omeomorfi. \square

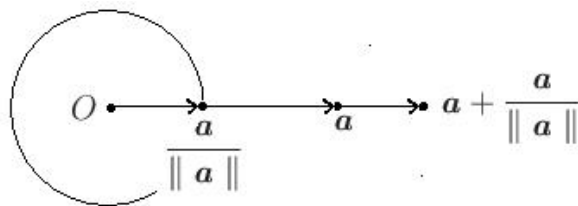


Figura 1.9: Esempio 1.5.30

ESEMPIO 1.5.30. (Omeomorfismi tra \mathbb{R}^2 meno un punto e \mathbb{R}^2 meno un cerchio chiuso)
Siano X e Y rispettivamente i punti del piano euclideo \mathbb{R}^2 meno il punto $O = (0, 0)$ e quelli di \mathbb{R}^2 meno il cerchio chiuso di centro O e raggio 1. Identifichiamo ogni punto A di \mathbb{R}^2 col segmento orientato $\mathbf{a} = (O, A)$ e consideriamo la funzione biunivoca (**Figura 1.9**)

$$f : \mathbf{a} \in X \rightarrow \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \in Y.$$

La funzione f e la sua inversa f^{-1} sono continue, così f è un omeomorfismo tra X e Y . Resta dunque provato che il piano euclideo meno un punto (**piano bucato**) e quello meno un cerchio chiuso sono omeomorfi. Allo stesso modo si vede che, per $n > 2$, \mathbb{R}^n meno un punto e \mathbb{R}^n meno un intorno sferico chiuso sono omeomorfi. \square

ESERCIZIO 1.5.31. (Un cerchio e una calotta chiusi sono omeomorfi) Sia X il cerchio definito da $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia Y la semicalotta chiusa della superficie sferica $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ definita da $Y = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$. Si provi che la funzione

$$(x, y, 0) \in X \rightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in Y$$

è un omeomorfismo. \square

DEFINIZIONE 1.5.32. (Funzioni aperte e funzioni chiuse) Una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici si dice **aperta** se trasforma aperti di X in aperti di Y e si dice **chiusa** se trasforma chiusi di X in chiusi di Y .

Osserviamo esplicitamente che le nozioni di funzione continua, funzione aperta e funzione chiusa sono indipendenti l'una dall'altra.

ESERCIZIO 1.5.33. (Omeomorfismi) Provare che un omeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ fra due spazi topologici è una funzione aperta e chiusa. Provare inoltre che :

- $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ è biunivoca, continua e aperta;
- $f : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo $\Leftrightarrow f$ è biunivoca, continua e chiusa. \square

ESEMPIO 1.5.34. (Funzioni continue non aperte) La funzione continua $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}, \mathbb{R}$ con la topologia naturale, non è aperta. Infatti, per esempio, $f(-1, 1) = [0, 1)$, che non è un aperto. \square

ESEMPIO 1.5.35. (Funzioni chiuse, non aperte e non continue) La funzione $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}, \mathbb{R}$ con la topologia delle semirette sinistre aperte, è chiusa, non aperta e non continua. Infatti, per esempio, $f(-\infty, 1) = [0, +\infty)$, $f^{-1}(-\infty, 1) = [0, 1)$, quindi f non è aperta e non è continua. Risulta, però, $f[a, +\infty) = [0, +\infty)$, se $a \leq 0$, e $f[a, +\infty) = [a^2, +\infty)$, se $a > 0$; cioè f è chiusa. \square

ESEMPIO 1.5.36. Ogni funzione tra uno spazio topologico X e uno spazio Y con la topologia discreta è aperta e chiusa. In questo modo si ottengono esempi di funzioni non continue, aperte e chiuse considerando funzioni non continue di X in Y . Analogamente le funzioni continue di X in Y danno esempi di funzioni continue, aperte e chiuse. Si osservi che queste ultime funzioni, se non sono biunivoche, non possono essere omeomorfismi. \square

ESEMPIO 1.5.37. (Funzioni aperte, chiuse e non continue) Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2 . Allora la funzione identità $a \in (X, \tau_1) \rightarrow a \in (X, \tau_2)$ è aperta e chiusa ma non continua. \square

1.6 Spazi connessi

Sottospazi di \mathbb{R}^3 come le sfere o i poliedri, parlando in modo informale, possono considerarsi figure “*indivisibili*”, costituite cioè da “*un solo pezzo*”. Tale proprietà, per esempio, non può essere attribuita alla figura formata da due facce opposte di un cubo, come si evince dalla Figura 1.10.

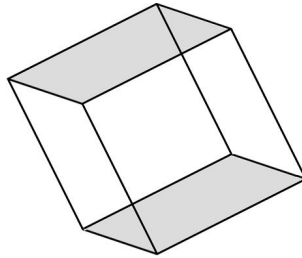


Figura 1.10: Facce opposte di un cubo

La proprietà in questione è intuitivamente una proprietà topologica e può essere formalmente descritta dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.6.1. Uno spazio topologico (X, τ) si dice **connesso** se non è unione di due suoi aperti non vuoti e disgiunti. In tal caso si dice anche che τ è una **topologia connessa**. Uno spazio non connesso si dice **sconnesso**. Un sottoinsieme Y di X si dice **connesso** o **sconnesso** se è tale come sottospazio di X . \square

Tornando all’osservazione iniziale, è chiaro che, secondo la precedente definizione, la figura costituita da due facce opposte di un cubo in \mathbb{R}^3 è uno spazio sconnesso. Vedremo più avanti che le sfere e i poliedri, come avevamo euristicamente intuito, sono spazi connessi.

ESEMPIO 1.6.2. (Le topologie irriducibili sono connesse) Le topologie per le quali due arbitrari aperti non vuoti sono ad intersezione non vuota sono connesse. Tali topologie, e i relativi spazi, si dicono **irriducibili**. Tra queste ritroviamo, per esempio, la topologia del tiro a bersaglio, la topologia di \mathbb{R} delle semirette sinistre aperte, la topologia di Zariski di \mathbb{F}^n con \mathbb{F} campo infinito e la topologia cofinita su un insieme infinito. \square

ESEMPIO 1.6.3. (La retta di Sorgenfrey è sconnessa) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$(-\infty, a) = \bigcup_{c < a} [c, a), \quad [a, +\infty) = \bigcup_{a < c} [a, c)$$

e, quindi, $(-\infty, a)$ e $[a, +\infty)$ sono sottospazi aperti di \mathbb{R} con la topologia degli intervalli c.a.. Ne segue che tale topologia è sconnessa, avendosi

$$(-\infty, a) \cup [a, +\infty) = \mathbb{R}, \quad (-\infty, a) \cap [a, +\infty) = \emptyset. \quad \square$$

ESERCIZIO 1.6.4. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2 . Provare che:

- τ_2 connessa $\Rightarrow \tau_1$ connessa,
- τ_1 sconnessa $\Rightarrow \tau_2$ sconnessa. \square

PROPOSIZIONE 1.6.5. Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti proprietà:

- X è connesso;
- X non è unione di due chiusi non vuoti e disgiunti;
- X non contiene alcun sottoinsieme proprio e non vuoto che sia aperto e chiuso.

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza di due aperti non vuoti e disgiunti A, A' di X tali che $A \cup A' = X$ equivale all'esistenza di due chiusi non vuoti e disgiunti: $C = \mathcal{C}(A) = A', C' = \mathcal{C}(A') = A$ tali che $C \cup C' = X$. In queste ipotesi, dunque, A e A' sono entrambi insiemi aperti e chiusi. \square

ESERCIZIO 1.6.6. Sia Y un sottospazio di uno spazio topologico X . Provare che un sottoinsieme T di Y è connesso in Y se, e solo se, è connesso in X . \square

ESERCIZIO 1.6.7. Sia X uno spazio topologico discreto. Provare che X è connesso se, e solo se, contiene un solo punto. \square

ESERCIZIO 1.6.8. Provare che lo spazio somma (cfr. **Esempio 1.3.12**) di due spazi topologici è sconnesso. \square

PROPOSIZIONE 1.6.9. Se ogni due punti distinti di uno spazio topologico X appartengono ad un sottospazio connesso di X , allora X è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che X sia sconnesso, esistano cioè due aperti non vuoti e disgiunti A, A' tali che $A \cup A' = X$. Se a, a' sono punti rispettivamente di A e A' , detotiamo con T un sottospazio connesso di X contenente a e a' . Allora risulta

$$(A \cap T) \cap (A' \cap T) = \emptyset, \quad (A \cap T) \cup (A' \cap T) = T,$$

con $A \cap T, A' \cap T \neq \emptyset$. Ne segue che T è sconnesso, un assurdo. \square

PROPOSIZIONE 1.6.10. Siano X uno spazio topologico e Y_1, Y_2 due suoi sottospazi connessi ad intersezione non vuota. Allora $Y_1 \cup Y_2$ è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, $Y = Y_1 \cup Y_2$ fosse sconnesso, esisterebbe un suo sottoinsieme non vuoto T chiuso e aperto. Tale sottoinsieme, non potendo essere contenuto in Y_2 , avrebbe intersezione non vuota con Y_1 . Allora $Y_1 \cap T$ sarebbe un sottospazio non vuoto di Y_1 chiuso e aperto e ciò è assurdo, essendo Y_1 connesso per ipotesi. \square

COROLLARIO 1.6.11. Siano X uno spazio topologico e $\{Y_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottospazi connessi di X ad intersezione non vuota. Allora

$$Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$$

è un sottospazio connesso.

DIMOSTRAZIONE. Siano c un punto in $\bigcap_{j \in J} Y_j$ e a, b punti di Y tali che $a \in Y_s, b \in Y_t, s, t \in J$. Allora $Y_s \cup Y_t$, essendo Y_s, Y_t ad intersezione non vuota, è un connesso per a, b contenuto in Y e ciò prova che Y è connesso di X . \square

ESERCIZIO 1.6.12. Siano X uno spazio topologico, $\{Y_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottospazi connessi di X ed esista $k \in J$ tale che $Y_k \cap Y_j$ è connesso per ogni $j \in J$. Allora,

$$Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$$

è un sottospazio connesso di X . \square

PROPOSIZIONE 1.6.13. (La chiusura di un connesso è connessa) Siano X uno spazio topologico e Y un suo sottospazio connesso. Allora la chiusura di Y è connessa.

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, \bar{Y} fosse sconnesso, esisterebbero due aperti A_1, A_2 di X tali che

$$(A_1 \cap \bar{Y}) \cup (A_2 \cap \bar{Y}) = \bar{Y}, \quad (A_1 \cap \bar{Y}) \cap (A_2 \cap \bar{Y}) = \emptyset,$$

con $A_1 \cap \bar{Y}, A_2 \cap \bar{Y}$ non vuoti e avremmo

$$(A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = Y, \quad (A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y) = \emptyset.$$

Ora, un punto $y_1 \in A_1 \cap \bar{Y}$ è di aderenza per Y , quindi Y contiene un punto $a_1 \in A_1$, essendo A_1 un aperto per y_1 , e risulta $A_1 \cap Y \neq \emptyset$. In modo analogo si vede che $A_2 \cap Y \neq \emptyset$. Le ultime due osservazioni provano che Y è sconnesso, il che è contro le ipotesi. \square

PROPOSIZIONE 1.6.14. Siano X uno spazio topologico e Y un suo sottospazio connesso. Allora ogni sottospazio T di X tale che $Y \subseteq T \subseteq \bar{Y}$ è connesso.

DIMOSTRAZIONE. La chiusura di Y nel sottospazio T è uguale a T e l'asserto segue dalla proposizione precedente. \square

PROPOSIZIONE 1.6.15. (La connessione si conserva per continuità) Siano $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e X uno spazio connesso. Allora $f(X)$ è un sottospazio connesso di Y ; in particolare, se f è suriettiva, Y è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo $f(X)$ sconnesso e sia $T \subseteq f(X)$ un sottospazio di $f(X)$ aperto e chiuso, con $\emptyset \neq T \neq f(X)$. Allora X risulta sconnesso, contenendo $f^{-1}(T)$ che è non vuoto, diverso da X , aperto e chiuso. Ciò è contro le ipotesi e l'asserto è provato. \square

Osserviamo esplicitamente che, in forza della proposizione precedente, abbiamo che **la connessione è invariante per omeomorfismi** e vale il seguente corollario.

COROLLARIO 1.6.16. Una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ trasforma sottospazi connessi di X in sottospazi connessi di Y . \square

1.6.1 Connessione in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n e connessione per poligonalità

Nel presente paragrafo supporremo \mathbb{R} e \mathbb{R}^n dotati della topologia naturale.

PROPOSIZIONE 1.6.17. Ogni intervallo chiuso $[a, b]$ di \mathbb{R} è connesso.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo $[a, b]$ unione di due suoi chiusi C_1, C_2 non vuoti e disgiunti e supponiamo $b \in C_2$. Notiamo esplicitamente che nelle nostre ipotesi C_1, C_2 sono chiusi anche in \mathbb{R} . Allora b è un maggiorante di C_1 e l'estremo superiore c di C_1 , essendo di aderenza per C_1 , appartiene a C_1 ed è diverso da b . Ne segue che $(c, b] \subseteq C_2$, quindi c , risultando aderente a C_2 , appartiene a C_2 ; un assurdo, essendo C_1, C_2 insieme disgiunti. \square

PROPOSIZIONE 1.6.18. (Connessi di \mathbb{R}) I sottospazi connessi di \mathbb{R} , con la topologia naturale, sono tutti e soli gli intervalli.

DIMOSTRAZIONE. Un intervallo di \mathbb{R} è connesso in forza delle **Proposizioni 1.6.9 e 1.6.17**. Ora, consideriamo un sottospazio connesso di \mathbb{R} e, per assurdo, supponiamo che non sia un intervallo. Allora esistono due punti $a, b \in Y$ e un punto $z \notin Y$ tali che $a < z < b$. Ne segue che

$$Y = (Y \cap (-\infty, z)) \cup (Y \cap (z, +\infty)),$$

un assurdo perché Y è connesso. \square

COROLLARIO 1.6.19. (Teorema del valor medio) Siano X uno spazio topologico connesso e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $a, b \in X$, la funzione assume tutti i valori tra $f(a)$ e $f(b)$.

DIMOSTRAZIONE. L'immagine $f(X)$ di X in f è un connesso di \mathbb{R} e, in forza della proposizione precedente, deve essere un intervallo. Ne segue che l'intervallo chiuso di estremi $f(a)$ e $f(b)$ è contenuto in $f(X)$. \square

ESERCIZIO 1.6.20. Siano J un intervallo di \mathbb{R} e c un punto di J diverso da eventuali estremi di J . Provare che $J \setminus \{c\}$ è un sottospazio sconnesso di \mathbb{R} . \square

PROPOSIZIONE 1.6.21. *Gli intervalli $[0, 1]$, $[0, 1)$ e $(0, 1)$ di \mathbb{R} sono a due a due non omeomorfi. Ne segue che ogni intervallo di \mathbb{R} , e quindi ogni sottospazio connesso di \mathbb{R} , è omeomorfo ad uno degli intervalli $[0, 1]$, $[0, 1)$ o $(0, 1)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse un omeomorfismo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$, la restrizione di f all'intervallo $(0, 1) = [0, 1] \setminus \{0, 1\}$ sarebbe un omeomorfismo tra $(0, 1)$ e $f(0, 1) = [0, 1] \setminus \{f(0), f(1)\}$ e ciò è assurdo perché $(0, 1)$ è connesso mentre $f(0, 1)$ non lo è. In modo analogo si prova che $[0, 1]$ e $[0, 1)$ non sono omeomorfi a $(0, 1)$. La seconda parte dell'asserto segue dalle **Proposizioni 1.5.25 e 1.6.18**. \square

Ricordiamo che, se \mathbf{a}, \mathbf{b} sono due elementi di \mathbb{R}^n , la retta ℓ per \mathbf{a} e \mathbf{b} ha equazione parametrica

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{b} - \mathbf{a})t + \mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}$$

e quando t varia in $[0, 1]$ il punto corrispondente $\mathbf{x}(t)$ descrive il segmento di estremi \mathbf{a}, \mathbf{b} . Poiché la funzione

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{x}(t) \in \ell$$

è un omeomorfismo tra \mathbb{R} (con la topologia naturale) e ℓ (con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n), la **Proposizione 1.6.18** può riformularsi nel seguente modo (cfr. **Proposizione 1.5.17**).

PROPOSIZIONE 1.6.22. (Connessi di una retta euclidea) *I sottospazi connessi di una retta di \mathbb{R}^n , con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^n , sono la retta stessa, le semirette (aperte e chiuse) e i segmenti (aperti, chiusi, semiaperti).*

ESEMPIO 1.6.23. (Insiemi convessi) Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n si dice **convesso** se il segmento di estremi due suoi punti distinti qualsiasi è contenuto in C . Dalle **Proposizioni 1.6.9, 1.6.22** segue che *i sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n sono connessi. In particolare risultano connessi, perché convessi, i seguenti sottoinsiemi: \mathbb{R}^n e i suoi sottospazi affini, i semispazi (aperti e chiusi), le sfere (aperte e chiuse), i poliedri regolari convessi (aperti e chiusi) di \mathbb{R}^3 . Si osservi che nel caso $n = 1$ i sottoinsiemi convessi sono tutti e soli gli intervalli.* \square



Figura 1.11: I cinque poliedri regolari convessi (solidi platonici)

ESEMPIO 1.6.24. (Le superfici sferiche sono connesse) La circonferenza S^1 di centro l'origine e raggio 1 in \mathbb{R}^2 è immagine della funzione continua

$$t \in [0, 2\pi] \rightarrow (\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora, in forza delle **Proposizioni 1.6.15 e 1.6.17**, S^1 , e quindi tutte le circonferenze di \mathbb{R}^2 , sono connesse. Ora, se tagliamo una superficie sferica S^{n-1} di \mathbb{R}^n , $n > 2$, con un iperpiano otteniamo una superficie sferica di \mathbb{R}^{n-1} . Usando questa osservazione e la **Proposizione 1.6.9** è facile provare per induzione su n che S^n è connessa. Si può provare che S^n , $n > 1$, è connessa anche osservando che S^n è la chiusura di $S^n \setminus \{A\}$, con A punto di S^n . Infatti, $S^n \setminus \{A\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n (cfr. **Esempio 1.5.28**), che è connesso, e la chiusura di un insieme connesso è connesso (cfr. **Proposizione 1.6.13**). \square

ESERCIZIO 1.6.25. Provare che, nel piano euclideo, un segmento (chiuso o aperto o non chiuso e non aperto) e una circonferenza non sono omeomorfi (aiuto: si utilizzi l'**Esercizio cfr. 1.5.13**). \square

ESERCIZIO 1.6.26. Sia X l'unione di due circonferenze del piano euclideo aventi in comune esattamente un punto. Provare che X non è omeomorfo ad una circonferenza. \square

ESEMPIO 1.6.27. (Poligonalità in \mathbb{R}^n) Si chiama **poligonale** in \mathbb{R}^n l'unione di una successione finita di segmenti s_1, s_2, \dots, s_m con la proprietà che il secondo estremo di s_j è uguale al primo estremo di s_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, m - 1$. In forza delle **Proposizioni 1.6.9, 1.6.22**, le poligonalità risultano insiemi connessi. \square

DEFINIZIONE 1.6.28. (Connessione per poligonalità) Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n si dice **connesso per poligonalità** se due suoi arbitrari punti distinti sono estremi di una poligonale contenuta nell'insieme. \square

Risultano, per esempio, connessi per poligonalità gli insiemi convessi ed i poliedri. Non sono connessi per poligonalità, pur essendo connesse, le superfici sferiche. La **Proposizione 1.6.9** e il fatto che le poligonalità sono insiemi connessi assicurano che ogni insieme connesso per poligonalità è connesso. Esistono, però, insiemi connessi

che non sono connessi per poligonali. Le due nozioni, quella di connessione e quella di connessione per poligonali, coincidono nel caso degli aperti di \mathbb{R}^n , come prova il prossimo risultato.

PROPOSIZIONE 1.6.29. *Un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , con la topologia naturale, è connesso per poligonali se, e solo se, è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. La prima implicazione è conseguenza dell'osservazione precedente. Ora, per assurdo, sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^n e supponiamo che contenga due punti x, y che non sono estremi di una poligonale contenuta in A . Consideriamo l'insieme A_1 dei punti di A congiungibili ad x mediante una poligonale contenuta in A e l'insieme $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che A_1 , che è non vuoto perché contiene x , è aperto. Infatti, un arbitrario punto $a \in A_1$ è centro di un intorno sferico U contenuto in A , essendo A aperto, e, per ogni punto $b \in U$, il segmento di vertici a, b è contenuto in U . Ne segue che b è congiungibile a x mediante una poligonale e, di conseguenza, U è contenuto in A_1 e A_1 è aperto. Allo stesso modo si vede che A_2 , che è non vuoto perché contiene y , è aperto. Allora A è unione dei due aperti non vuoti e disgiunti A_1 e A_2 e ciò è assurdo. Ne segue che A è connesso per poligonali. \square

1.6.2 Componenti connesse

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se, per ogni due punti $a, b \in X$, si pone

$$a \stackrel{\varepsilon}{\sim} b \Leftrightarrow a, b \text{ appartengono ad uno stesso sottospazio connesso di } X \quad (1.31)$$

si ottiene, come subito si prova, una relazione di equivalenza su X . Ogni classe d'equivalenza rispetto a questa relazione si chiama **componente connessa** di X . La componente connessa di X contenente un fissato punto $a \in X$ si chiama **componente connessa di a** e si denota con $k(a)$.

PROPOSIZIONE 1.6.30. *Per uno spazio topologico X , valgono le seguenti proprietà:*

- X possiede un'unica componente connessa se, e solo se, è connesso;
- ogni componente connessa di X è un connesso;
- un connesso Y contenente un punto $a \in X$ è contenuto nella componente connessa di a ;
- la componente connessa di un punto $a \in X$ è uguale all'unione di tutti i sottospazi connessi di X contenenti a ;
- ogni componente connessa di X è un sottospazio connesso massimale (rispetto all'inclusione), e viceversa;

- ogni componente connessa di X è un chiuso;
- ogni sottospazio connesso, aperto e chiuso di X è una componente connessa.

DIMOSTRAZIONE. È lasciata per esercizio al Lettore. Per la dimostrazione delle ultime due proprietà si utilizzi la **Proposizione 1.6.13**. \square

OSSERVAZIONE 1.6.31. (Le componenti connesse non sono necessariamente aperte) Nella precedente proposizione abbiamo visto che le componenti connesse di uno spazio topologico sono sottospazi chiusi e si prova subito che, se il numero di tali componenti è finito, allora ogni componente è anche aperta. In generale, però, le componenti connesse di uno spazio non sono necessariamente aperte, come è mostrato nel seguente esempio.

Sia \mathbb{Q} l'insieme dei numeri razionali considerato come sottospazio di \mathbb{R} , sia Y un sottospazio di \mathbb{Q} con almeno due elementi a, b e supponiamo $a < b$. Detto r un numero irrazionale tale che $a < r < b$, gli insiemi $(-\infty, r) \cap Y$ e $Y \cap (r, +\infty)$ sono aperti di Y non vuoti e disgiunti la cui unione è Y e, quindi, Y non è connesso. Ne segue che gli unici sottospazi connessi di \mathbb{Q} , e quindi le componenti connesse di \mathbb{Q} , sono i singleton dei suoi punti.

Da notare che anche la topologia discreta su un insieme infinito ha per componenti connesse i singleton dei suoi punti ma, in questo caso, tali componenti sono aperte. \square

ESEMPIO 1.6.32. ($GL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{R})$) Il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici quadrate invertibili a coefficienti reali, è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n,n}$ con la topologia naturale. La funzione

$$f : A \in GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è continua e suriettiva, da cui segue che $GL(n, \mathbb{R})$ non è connesso. È facile rendersi conto che $GL(n, \mathbb{R})$ possiede esattamente due componenti connesse: una $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ è l'insieme delle matrici a determinante positivo, l'altra $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ quella delle matrici a determinante negativo. Il gruppo lineare speciale $SL(n, \mathbb{R})$, cioè il gruppo delle matrici in $GL(n, \mathbb{R})$ a determinante uguale a 1, è contenuto nella componente connessa $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ di $GL(n, \mathbb{R})$ ed è connesso. \square

ESERCIZIO 1.6.33. Calcolare le componenti connesse dei seguenti spazi:

- \mathbb{R} meno un numero finito k di suoi punti;
- \mathbb{R}^2 meno un numero finito k di suoi punti;
- \mathbb{R}^2 meno i punti di una iperbole;
- \mathbb{R}^2 meno i punti di una ellisse;
- \mathbb{R}^2 meno i punti di una parabola;
- \mathbb{R}^n meno i punti di un iperpiano;
- \mathbb{R}^n meno i punti di un sottospazio affine di dimensione k , $0 < k < n - 1$;
- \mathbb{Z} , considerato come sottospazio di \mathbb{R} . \square

1.7 Spazi compatti

Molte proprietà topologiche dei sottospazi chiusi e limitati di \mathbb{R}^n , con la topologia naturale, dipendono dalla cosiddetta proprietà di *compattezza*. Tale proprietà, che definisce un'ampia e importante classe di spazi, sarà introdotta e discussa in questo paragrafo.

DEFINIZIONE 1.7.1. (Spazi compatti) Uno spazio topologico (X, τ) si dice **compatto** se ogni suo ricoprimento di aperti contiene un sottoricoprimento finito. In altre parole, per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tale che

$$X = \bigcup_{j \in J} A_j$$

esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$X = \bigcup_{i \in F} A_i.$$

In tal caso si dice anche che τ è una **topologia compatta**. Un sottoinsieme Y di X si dice **compatto** se è compatto come sottospazio di X , cioè se per ogni famiglia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$$

esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in F} A_i. \quad \square$$

ESERCIZIO 1.7.2. Provare che la topologia banale, una qualunque topologia su un insieme finito e la topologia cofinita sono compatte. Provare, inoltre, che la topologia discreta su un insieme X è compatta se, e solo se, X è finito. \square

ESERCIZIO 1.7.3. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in uno spazio topologico X avente limite ℓ e sia $T = \{x \in X : x = x_k, \text{ per qualche intero } k\} \cup \{\ell\}$. Provare che T è un sottospazio compatto di X . \square

ESERCIZIO 1.7.4. Provare che, in uno spazio topologico, l'unione di due sottospazi compatti è compatta. \square

ESEMPIO 1.7.5. I sottospazi finiti di un qualunque spazio topologico sono compatti; in particolare sono compatti i singleton dei punti. \square

ESEMPIO 1.7.6. (\mathbb{R}^n non è compatto) L'unione di un numero finito di interni sferici, con centro un fissato punto $a \in \mathbb{R}^n$, coincide con l'intorno sferico di raggio massimo. Ne segue che il ricoprimento di aperti di \mathbb{R}^n formato da tutti gli interni sferici di centro a non contiene un sottoricoprimento finito e, quindi, \mathbb{R}^n non è compatto. In particolare, \mathbb{R} non è compatto. \square

ESEMPIO 1.7.7. (I sottospazi non limitati di uno spazio metrico non sono compatti) L'esempio precedente si generalizza nel seguente modo. Un sottospazio di uno spazio metrico X è limitato se è limitata la metrica in essa indotta da X o, equivalentemente, se è contenuto in un intorno sferico chiuso di X . Allora, se Y è un sottospazio non limitato di X , il ricoprimento di Y formato da tutti gli interni sferici di centro un fissato punto $a \in X$ non contiene un sottoricoprimento finito di Y e, quindi, Y non è compatto. Ovviamente, **uno spazio metrico non limitato non è compatto**. In particolare **sono non compatti i sottospazi non limitati di \mathbb{R}^n** . \square

ESERCIZIO 1.7.8. Provare che lo spazio somma (cfr. **Esempio 1.3.12**) di due spazi topologici compatti è compatto. \square

ESERCIZIO 1.7.9. Siano τ_1, τ_2 due topologie su uno stesso insieme X con τ_1 strettamente meno fine di τ_2 . Provare che:

- τ_2 compatta $\Rightarrow \tau_1$ compatta,
- τ_1 non compatta $\Rightarrow \tau_2$ non compatta. \square

DEFINIZIONE 1.7.10. Si dice che una famiglia di chiusi di uno spazio topologico ha la **proprietà dell'intersezione finita** se ogni sua sottofamiglia finita è ad intersezione non vuota. \square

PROPOSIZIONE 1.7.11. (Una caratterizzazione dei compatti) Uno spazio topologico X è compatto se, e solo se, ogni sua famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita è ad intersezione non vuota.

DIMOSTRAZIONE. Se X è compatto e $\mathfrak{F} = \{C_i\}_{i \in I}$ una sua famiglia di chiusi tale che $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, risulta

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}(C_i) = \mathcal{C}\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = \mathcal{C}(\emptyset) = X$$

e, per la compattezza di X , esiste un sottoinsieme finito F di I tale che

$$X = \bigcup_{f \in F} \mathcal{C}(C_f) = \mathcal{C}\left(\bigcap_{f \in F} C_f\right).$$

Allora $\bigcap_{f \in F} C_f = \emptyset$ e, quindi, \mathfrak{C} non ha la proprietà dell'intersezione finita, il che è assurdo.

Se ogni famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita è ad intersezione non vuota e se $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti di X , risulta

$$\mathcal{C} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}(A_i) = \emptyset$$

e, quindi, la famiglia di chiusi $\{\mathcal{C}(A_i)\}_{i \in I}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Allora esiste un sottoinsieme finito F di I tale che

$$\bigcap_{f \in F} \mathcal{C}(A_f) = \mathcal{C} \left(\bigcup_{f \in F} A_f \right) = \emptyset$$

e risulta $X = \bigcup_{f \in F} A_f$. Così X è compatto e l'asserto è provato. \square

PROPOSIZIONE 1.7.12. (I chiusi di un compatto sono compatti) *Ogni sottoinsieme chiuso Y di uno spazio compatto X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di aperti di X tale che

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j,$$

X risulta unione dell'aperto $X \setminus Y$ e della famiglia $\{A_j\}_{j \in J}$:

$$X = (X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right).$$

Allora, essendo X compatto, esiste un sottoinsieme finito F di J tale che

$$X = (X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{j \in F} A_j \right),$$

cioè

$$Y \subseteq \bigcup_{j \in F} A_j$$

e Y è compatto. \square

OSSERVAZIONE 1.7.13. (Un sottospazio compatto può non essere chiuso) I sottospazi compatti di uno spazio topologico non sono necessariamente chiusi, anche nell'ipotesi che lo spazio sia compatto. Per esempio:

- Nella topologia delle semirette sinistre aperte di \mathbb{R} i singleton dei punti sono compatti ma non chiusi.

- Su $X = \{a, b\}$, la topologia con tre aperti $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ è compatta e il suo sottospazio $\{a\}$ è compatto e non è chiuso.

La proprietà per cui ogni sottospazio compatto è chiuso è invece vera nel caso degli spazi T_2 , come fra poco mostreremo. \square

LEMMA 1.7.14. *Sia X uno spazio T_2 e Y un suo sottospazio compatto. Allora, per ogni punto $x \in X \setminus Y$, esistono un aperto U_x contenente Y e un aperto V_x contenente x ad intersezione vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $y \in Y$, esistono un intorno aperto A_y di y e un intorno aperto V_x^y di x ad intersezione vuota, essendo X uno spazio T_2 . Allora è

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} A_y$$

e, per la compattezza di Y , esiste un insieme finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ di punti di Y tali che

$$Y \subseteq A_{y_1} \cup A_{y_2} \cup \dots \cup A_{y_n} = U_x.$$

Ora, considerato l'aperto

$$V_x = V_x^{y_1} \cap V_x^{y_2} \cap \dots \cap V_x^{y_n} \ni x,$$

risulta $U_x \cap V_x = \emptyset$. Infatti, se esistesse un punto $z \in U_x \cap V_x$, avremmo $z \in V_x^{y_j} \cap A_{y_j}$, per qualche intero j ; un assurdo. \square

PROPOSIZIONE 1.7.15. (I compatti di uno spazio T_2 sono chiusi) *Sia X uno spazio T_2 . Allora ogni sottospazio compatto Y di X è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. In forza del lemma precedente, ogni punto di $X \setminus Y$ possiede un intorno disgiunto da Y , cioè $X \setminus Y$ è aperto. Ne segue che Y è chiuso. \square

OSSERVAZIONE 1.7.16. (Assioma di separazione T_3) In forza della **Proposizione 1.7.12** e del **Lemma 1.7.14**, in uno spazio X compatto e T_2 vale la proprietà:

- per ogni chiuso C e per ogni $x \in X \setminus C$ esistono un aperto U_x contenente C e un aperto V_x contenente x ad intersezione vuota.

Gli spazi topologici T_1 che verificano la precedente proprietà si dicono **spazi T_3** , o **regolari**. Quanto appena osservato assicura che **uno spazio compatto e T_2 è anche T_3** . \square

La proprietà di separazione per le coppie punto-compatto che vale negli spazi T_2 (cfr. **Lemma 1.7.14**) si può estendere alle coppie di sottospazi compatti, come proveremo nella proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 1.7.17. *Siano X uno spazio T_2 e Y_1, Y_2 due suoi sottospazi compatti e disgiunti. Allora esistono un aperto V contenente Y_1 e un aperto U contenente Y_2 ad intersezione vuota.*

DIMOSTRAZIONE. In forza del **Lemma 1.7.14**, per ogni punto $x \in Y_1$, esistono un aperto U_x contenente Y_2 e un aperto V_x contenente x ad intersezione vuota. Allora è

$$Y_1 \subseteq \bigcup_{x \in Y_1} V_x$$

e, per la compattezza di Y_1 , esiste un insieme finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di punti di Y_1 tali che

$$Y_1 \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n} = V.$$

Ora, considerato l'aperto

$$U = U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_n} \supseteq Y_2,$$

risulta $U \cap V = \emptyset$. Infatti, se esistesse un punto $z \in U \cap V$, avremmo $z \in V_{x_j} \cap U_{x_j}$, per qualche intero j ; un assurdo. \square

OSSERVAZIONE 1.7.18. (Assioma di separazione T_4) In forza delle **Proposizioni 1.7.12** e **1.7.17**, in uno spazio X compatto e T_2 vale la proprietà:

- per ogni coppia di chiusi disgiunti C_1, C_2 esistono un aperto V contenente C_1 e un aperto U contenente C_2 ad intersezione vuota.

Gli spazi topologici T_1 che verificano la precedente proprietà si dicono **spazi T_4** , o **normali**. È chiaro che ogni spazio T_4 è anche T_3 . Quanto prima osservato assicura che **uno spazio compatto e T_2 è anche T_4** . \square

PROPOSIZIONE 1.7.19. (Teorema di B.Bolzano e K.Weierstrass) *Ogni sottoinsieme infinito Y di uno spazio compatto X ha almeno un punto di accumulazione.*

DIMOSTRAZIONE. Si supponga, per assurdo, che Y sia privo di punti di accumulazione e, per ogni punto $x \in X$ si consideri un aperto A_x per x tale che $Y \cap A_x = \emptyset$ oppure $Y \cap A_x = \{x\}$. Allora, per la compattezza di X , esiste un numero finito di suoi punti x_1, x_2, \dots, x_n tali che

$$X = A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n},$$

e quindi

$$Y = Y \cap X = Y \cap (A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_n}) = (Y \cap A_{x_1}) \cup (Y \cap A_{x_2}) \cup \dots \cup (Y \cap A_{x_n}).$$

Ora, poiché $Y \cap A_{x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, contiene al più un elemento, Y risulta finito; un assurdo. \square

PROPOSIZIONE 1.7.20. *Sia X uno spazio compatto verificante il primo assioma di numerabilità. Allora ogni successione di punti di X ammette una sottosuccessione convergente (gli spazi con questa proprietà si dicono **compatti per successioni**, o **sequenzialmente compatti**).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti di X e sia T l'insieme dei suoi punti, cioè $T = \{x \in X : x = x_k, \text{ per qualche intero } k\}$. Possiamo supporre che T sia infinito perchè nel caso contrario $\{x_n\}$ è definitivamente costante e quindi ha una sottosuccessione convergente. Ora, in forza della proposizione precedente, T possiede almeno un punto di accumulazione a e possiamo considerare un sistema fondamentale numerabile di intorni $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di tale punto. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, poiché $V_k = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ è un intorno di a , esiste un punto $x_{n_k} \in V_k$ e risulta

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots \supseteq V_k \supseteq \dots$$

Ne segue facilmente che la sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ converge ad a . \square

OSSERVAZIONE 1.7.21. (Relazioni tra compattezza e compattezza per successioni) La compattezza e la compattezza per successioni sono nozioni non equivalenti. Esistono, infatti, spazi compatti che non sono compatti per successioni e, viceversa, spazi compatti per successioni che non sono compatti. È però possibile provare che queste due nozioni sono equivalenti per gli spazi metrici (lo proveremo fra poco per i sottospazi di \mathbb{R}^n). \square

PROPOSIZIONE 1.7.22. *Ogni spazio metrico compatto è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Siano (X, d) uno spazio metrico, (a_n) una successione in X di Cauchy e (a_{n_k}) una sua sottosuccessione convergente ad un punto ℓ (esistente in forza dell'ultima proposizione). Allora, per ogni numero reale $\epsilon > 0$, possiamo considerare due interi positivi t, s tali che

$$k > t \Rightarrow d(a_{n_k}, \ell) < \epsilon/2 \quad e \quad m, n > s \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/2,$$

così, prendendo $k > t$ e $n_k > s$, abbiamo

$$n > s \Rightarrow d(a_n, \ell) \leq d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, \ell) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ne segue che (a_n) converge. \square

PROPOSIZIONE 1.7.23. (La compattezza si conserva per continuità) Siano $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e X uno spazio compatto. Allora $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y ; in particolare, se f è suriettiva, Y è compatto.

DIMOSTRAZIONE. Se $\{A'_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di aperti di $f(X)$, essendo f continua, la famiglia $\{A_i = f^{-1}(A'_i)\}_{i \in I}$ risulta un ricoprimento di aperti di X e da questo, per la compattezza di X , se ne può estrarre uno finito $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\}$. Allora si ha subito che $\{A'_{i_1}, A'_{i_2}, \dots, A'_{i_n}\}$ è un ricoprimento di $f(X)$ e l'asserto è provato. \square

Osserviamo esplicitamente che, in forza della proposizione precedente, abbiamo che **la compattezza è invariante per omeomorfismi** e che **una funzione continua trasforma sottospazi compatti in sottospazi compatti**.

PROPOSIZIONE 1.7.24. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua di uno spazio compatto X in uno di Hausdorff Y . Allora f è chiusa. In particolare, se f è biunivoca, è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Un chiuso C di X è compatto, per la compattezza di X . Allora $f(C)$ è un compatto di uno spazio T_2 e quindi è chiuso. \square

1.8 Prodotti

Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ due spazi topologici, notazione che manterremo in tutto il paragrafo, e poniamo

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2) = \{A_1 \times A_2 \subseteq X_1 \times X_2 \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}.$$

La famiglia \mathcal{B} è un ricoprimento di $X_1 \times X_2$ e l'intersezione di due suoi elementi $A_1 \times A_2, A'_1 \times A'_2$ è ancora un elemento di \mathcal{B} , risultando

$$(A_1 \times A_2) \cap (A'_1 \times A'_2) = (A_1 \cap A'_1) \times (A_2 \cap A'_2).$$

Ne segue che \mathcal{B} verifica gli assiomi delle basi e, quindi (cfr. **Proposizione 1.3.28**), esiste un'unica topologia su $X_1 \times X_2$ che ammette \mathcal{B} come base.

DEFINIZIONE 1.8.1. (Spazio prodotto) L'unica topologia τ sul prodotto $X_1 \times X_2$ dei sostegni di due spazi topologici $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ che ammette $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2)$ come base prende il nome di **topologia prodotto di τ_1 e τ_2** . Gli aperti della base \mathcal{B} si dicono **aperti elementari**. Lo spazio topologico $X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, \tau)$ prende il nome di **spazio prodotto di X_1 per X_2** . Le funzioni

$$p_{X_j} : (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2 \rightarrow a_j \in X_j, \quad j = 1, 2,$$

prendono il nome di **proiezioni** di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 , rispettivamente. \square

Nel seguito denoteremo semplicemente con p_j la proiezione canonica p_{X_j} , $j = 1, 2$.

OSSERVAZIONE 1.8.2. Si noti che l'unione di elementi di \mathcal{B} non è in generale un elemento di \mathcal{B} e, quindi, \mathcal{B} non è una topologia su $X_1 \times X_2$. Per esempio, nello spazio prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ove \mathbb{R} ha la topologia naturale, i sottospazi $(0, 1) \times (0, 1)$ e $(2, 3) \times (2, 3)$ sono aperti elementari ma la loro unione non lo è. \square

PROPOSIZIONE 1.8.3. Siano \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 basi rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2 . Allora la famiglia

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base per lo spazio prodotto $X_1 \times X_2$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di $\mathcal{B}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ sono aperti di $X_1 \times X_2$, basta provare che ogni aperto elementare di $X_1 \times X_2$ è unione di elementi di $\mathcal{B}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Se, dunque, $A_1 \times A_2$ è un aperto elementare con

$$A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i^1 \quad \text{e} \quad A_2 = \bigcup_{j \in J} B_j^2, \quad \text{con } B_i^1 \in \mathcal{B}_1, B_j^2 \in \mathcal{B}_2, (i, j) \in I \times J,$$

risulta

$$A_1 \times A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i^1 \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j^2 \right) = \bigcup_{(i, j) \in I \times J} (B_i^1 \times B_j^2)$$

e l'asserto è provato. \square

ESERCIZIO 1.8.4. Siano x_1 e x_2 punti rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2 . Siano $\mathcal{U}_1(x_1)$ e $\mathcal{U}_2(x_2)$ sistemi fondamentali d'intorni rispettivamente di x_1 in X_1 e x_2 in X_2 . Provare che la famiglia

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1), U_2 \in \mathcal{U}_2(x_2)\}$$

è un sistema fondamentale d'intorni di (x_1, x_2) nello spazio prodotto $X_1 \times X_2$. Provare anche che, se \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 sono sistemi fondamentali d'intorni rispettivamente di X_1 e X_2 , allora

$$\mathcal{U} = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$$

è un sistema fondamentale di intorni del prodotto $X_1 \times X_2$. \square

OSSERVAZIONE 1.8.5. ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^2) Il prodotto cartesiano di due intervalli limitati di \mathbb{R} , con la topologia naturale, è un sottospazio di \mathbb{R}^2 , con la topologia naturale, che prende il nome di **rettangolo**. Nel caso gli intervalli in questione abbiano la stessa lunghezza si parla ovviamente di **quadrato**. Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà:

- un rettangolo prodotto di intervalli aperti (risp. chiusi) è un aperto (risp. chiuso) di \mathbb{R}^2 e, in questo caso, si parla di **rettangolo aperto** (risp. **chiuso**);
- i rettangoli aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^2 ;
- i quadrati aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^2 .

Allora, poiché i rettangoli aperti sono una base anche per la topologia prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cfr. **Proposizione 1.8.3**), ne segue che **la topologia prodotto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è esattamente la topologia naturale di \mathbb{R}^2** . \square

PROPOSIZIONE 1.8.6. *Le proiezioni*

$$p_j : (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2 \rightarrow a_j \in X_j ,$$

$j = 1, 2$, sono funzioni continue e aperte. Inoltre, la topologia prodotto è la topologia meno fine di $X_1 \times X_2$ per cui le proiezioni risultano continue.

DIMOSTRAZIONE. La proiezione p_1 trasforma un aperto $A_1 \times A_2$ della base \mathcal{B} nell'aperto A_1 di X_1 e la controimmagine in p_1 di un aperto A_1 di X_1 è l'aperto $A_1 \times X_2$ di $X_1 \times X_2$. Ne segue che p_1 è continua e aperta e in modo analogo si prova che ciò è vero anche per p_2 . Sia ora σ una topologia di $X_1 \times X_2$ rispetto alla quale le due proiezioni sono continue. Allora, per $i = 1, 2$, se A_i è un aperto di X_i , $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2$ e $p_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2$ sono aperti di σ . Ne segue che $A_1 \times A_2 = (A_1 \times X_2) \cap (X_1 \times A_2)$ è un aperto di σ e da ciò segue subito che σ è più fine della topologia prodotto di $X_1 \times X_2$. \square

ESEMPIO 1.8.7. (Le proiezioni non sono chiuse) In $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (cfr. **Esempio 1.8.5**), con la topologia naturale, si consideri il sottoinsieme

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 = 0\} \text{ (iperbole equilatera)} .$$

Y è chiuso, perchè è un insieme algebrico (cfr. **Osservazione 1.5.6**), ma la sua prima proiezione

$$p_1(Y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$$

non è un chiuso di \mathbb{R} . Ciò prova che, in generale, le proiezioni non sono funzioni chiuse. \square

PROPOSIZIONE 1.8.8. (Proprietà di universalità del prodotto) Siano T, X_1, X_2 spazi topologici e $f : T \rightarrow X_1, g : T \rightarrow X_2$ due funzioni. Allora la funzione

$$h : a \in T \rightarrow (f(a), g(a)) \in X_1 \times X_2$$

è continua se, e solo se, f e g sono continue.

DIMOSTRAZIONE. Se h è continua, le funzioni $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$ sono continue perché composte di funzioni continue. Se f, g sono continue e $A_1 \times A_2$ è un aperto elementare di $X_1 \times X_2$, risulta

$$\begin{aligned} h^{-1}(A_1 \times A_2) &= \{t \in T : h(t) = (f(t), g(t)) \in A_1 \times A_2\} \\ &= \{t \in T : f(t) \in A_1, g(t) \in A_2\} = f^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2), \end{aligned}$$

da cui si ricava che la controimmagine in h di un aperto di $X_1 \times X_2$ è un aperto di T . Ne segue che h è continua e l'asserto è provato. \square

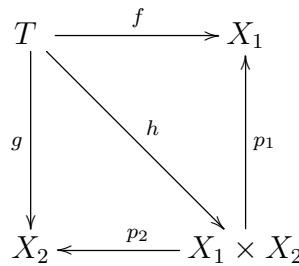


Figura 1.12: Proposizione 1.8.8

COROLLARIO 1.8.9. Siano X, Y due spazi topologici e $f : X \rightarrow Y^2$ una funzione. Allora, posto $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ per ogni $x \in X$, la funzione f è continua se, e solo se, f_1 e f_2 sono continue.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare la proprietà di universalità del prodotto alle funzioni f_1 e f_2 . \square

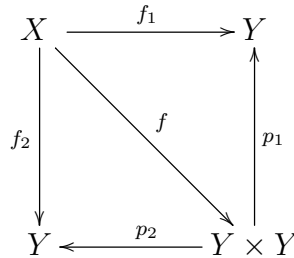


Figura 1.13: Corollario 1.8.9

PROPOSIZIONE 1.8.10. Siano Y_1, Y_2 sottospazi rispettivamente degli spazi topologico X_1, X_2 . Allora la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ su $Y_1 \times Y_2$ coincide con il prodotto delle topologie indotte su Y_1 e Y_2 rispettivamente da X_1 e X_2 .

DIMOSTRAZIONE. Un aperto T di $Y_1 \times Y_2$ con la topologia indotta da $X_1 \times X_2$ è del tipo $(Y_1 \times Y_2) \cap A$, con A aperto nel prodotto $X_1 \times X_2$, per cui

$$A = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i^1 \times A_j^2),$$

con A_i^1 aperto di X_1 e A_j^2 aperto di X_2 , per ogni $i \in I, j \in J$. Allora risulta

$$\begin{aligned} T &= (Y_1 \times Y_2) \cap A = (Y_1 \times Y_2) \cap \left(\bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i^1 \times A_j^2) \right) \\ &= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (Y_1 \times Y_2) \cap (A_i^1 \times A_j^2) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (Y_1 \cap A_i^1) \times (Y_2 \cap A_j^2) \end{aligned}$$

da cui si ha che T è aperto nel prodotto delle topologie indotte su Y_1 e Y_2 rispettivamente da X_1 e X_2 . Le precedenti uguaglianze, lette a ritroso, provano la seconda parte dell'asserto. \square

ESERCIZIO 1.8.11. Siano a e b punti rispettivamente degli spazi topologici X_1 e X_2 . Provare che le funzioni

$$(x_1, b) \in X_1 \times \{b\} \rightarrow x_1 \in X_1, \quad (a, x_2) \in \{a\} \times X_2 \rightarrow x_2 \in X_2,$$

restrizioni a $X_1 \times \{b\}$ e $\{a\} \times X_2$ delle proiezioni canoniche p_1, p_2 di $X_1 \times X_2$ rispettivamente su X_1 e X_2 , sono omeomorfismi. \square

PROPOSIZIONE 1.8.12. (Prodotti di connessi) *Il prodotto di due spazi topologici X_1, X_2 è connesso se, e solo se, X_1 e X_2 sono connessi.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni canoniche di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 sono continue e suriettive e quindi, se $X_1 \times X_2$ è connesso, sono connessi anche X_1 e X_2 . Supponiamo ora che X_1 e X_2 siano connessi e consideriamo due punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ di $X_1 \times X_2$. In forza dell'**Esercizio 1.8.11**, i sottospazi $X_1 \times \{b_2\}, \{a_1\} \times X_2$ sono connessi e, in più, hanno in comune il punto (a_1, b_2) . Allora $(X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{a_1\} \times X_2)$ è un connesso contenente i punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ e da ciò segue che $X_1 \times X_2$ è connesso. \square

PROPOSIZIONE 1.8.13. (Prodotti di compatti) *Il prodotto di due spazi topologici X_1, X_2 è compatto se, e solo se, X_1 e X_2 sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Le proiezioni canoniche di $X_1 \times X_2$ su X_1 e X_2 sono continue e suriettive e quindi, se $X_1 \times X_2$ è compatto, sono compatti anche X_1 e X_2 . Siano ora X_1, X_2 due spazi topologici compatti e $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento di aperti del loro prodotto $X_1 \times X_2$:

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Per ogni $j \in J$, l'aperto A_j di $X_1 \times X_2$ è del tipo

$$A_j = \bigcup_{t \in T_j} U_t \times V_t,$$

ove U_t, V_t sono aperti rispettivamente di X_1, X_2 e T_j è un insieme. Posto, inoltre,

$$T = \bigcup_{j \in J} T_j,$$

la famiglia

$$\mathcal{F} = \{U_t \times V_t\}_{t \in T}$$

è un ricoprimento di aperti di $X_1 \times X_2$. Per ogni $x \in X_1$, risulta

$$\{x\} \times X_2 \subseteq X_1 \times X_2 = \bigcup_{t \in T} U_t \times V_t$$

e, essendo $\{x\} \times X_2$ compatto, perché omeomorfo a X_2 (cfr. **Esercizio 1.8.11**), esiste un sottoinsieme finito $T(x)$ di T tale che

$$\{x\} \times X_2 \subseteq \bigcup_{t \in T(x)} U_t \times V_t, \quad \text{con } x \in U_t, \quad \text{per ogni } t \in T(x).$$

Ora, per ogni $x \in X_1$, possiamo considerare l'aperto di X_1 , contenente x , definito da

$$U(x) = \bigcap_{t \in T(x)} U_t$$

e possiamo costruire un ricoprimento di aperti di X_1 ponendo

$$\mathcal{U} = \{U(x)\}_{x \in X_1}.$$

Dalla compattezza di X_1 , segue che esistono un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_m \in X_1$, tali che

$$X_1 = U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_m)$$

e la famiglia finita di aperti di $X_1 \times X_2$

$$\{U(x_1) \times V_t\}_{t \in T(x_1)} \cup \{U(x_2) \times V_t\}_{t \in T(x_2)} \cup \dots \cup \{U(x_m) \times V_t\}_{t \in T(x_m)}$$

è un ricoprimento finito di $X_1 \times X_2$.

A questo punto osserviamo che, per ogni $k = 1, 2, \dots, m$ e $t \in T(x_k)$, l'aperto $U(x_k) \times V_t$ è contenuto in qualche aperto della famiglia \mathcal{A} , diciamo $A_{i(k,t)}$; di conseguenza \mathcal{A} possiede il sottoricoprimento finito

$$\{A_{i(k,t)} : k = 1, 2, \dots, m; t \in T\}$$

e così $X_1 \times X_2$ è compatto. □

Vediamo ora come la nozione di prodotto di due spazi topologici si generalizza in modo naturale a quella di prodotto di un numero finito di spazi. Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$, $n > 2$, spazi topologici, notazione che manterremo in tutto il paragrafo, e poniamo

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2, \dots, A_n \in \tau_n\}.$$

La famiglia \mathcal{B} è un ricoprimento di $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e l'intersezione di due suoi elementi è ancora un elemento di \mathcal{B} . Ne segue che \mathcal{B} verifica gli assiomi delle basi e, quindi (cfr. **Proposizione 1.3.28**), esiste un'unica topologia su $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, che ammette \mathcal{B} come base. Tale topologia prende il nome di **topologia prodotto** di $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ e gli aperti della base \mathcal{B} si dicono **aperti elementari**. Le funzioni

$$p_{X_j} : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow a_j \in X_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

prendono il nome di **proiezioni** e, come nel caso $n = 2$, risultano continue e aperte. Inoltre **la topologia prodotto è la meno fine tra le topologie su $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ per cui risultano continue tutte le proiezioni p_j** .

OSSERVAZIONE 1.8.14. Siano $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), (X_3, \tau_3)$ spazi topologici. È facile provare che le funzioni

$$((a_1, a_2), a_3) \in (X_1 \times X_2) \times X_3 \rightarrow (a_1, a_2, a_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3,$$

$$(a_1, (a_2, a_3)) \in X_1 \times (X_2 \times X_3) \rightarrow (a_1, a_2, a_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3,$$

sono omeomorfismi. Più in generale, se $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$ sono spazi topologici, le funzioni del tipo

$$\begin{aligned} ((a_1, \dots, a_t)(a_{t+1}, \dots, a_n)) \in (X_1 \times \dots \times X_t) \times (X_{t+1} \times \dots \times X_n) \rightarrow \\ \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \end{aligned}$$

sono omeomorfismi. □

OSSERVAZIONE 1.8.15. L'Osservazione 1.8.5 si generalizza nel modo seguente. Il prodotto cartesiano di n intervalli limitati di \mathbb{R} , con la topologia naturale, è un sottospazio di \mathbb{R}^n , con la topologia naturale, che prende il nome di n -**rettangolo**. Nel caso gli intervalli in questione abbiano la stessa lunghezza si parla di n -**cubo**. Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà:

- un n -rettangolo prodotto di intervalli aperti (risp. chiusi) è un aperto (risp. chiuso) di \mathbb{R}^n e, in questo caso, si parla di n -**rettangolo aperto** (risp. **chiuso**);
- gli n -rettangoli aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^n ;
- gli n -cubi aperti costituiscono una base di \mathbb{R}^n .

Ne segue che **la topologia prodotto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (\mathbb{R} per se stesso n volte) è esattamente la topologia naturale di \mathbb{R}^n** e la topologia prodotto di $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ è la topologia naturale di \mathbb{R}^n , per ogni h, k con $h + k = n$. \square

Tutte le proprietà e le proposizioni provate nel presente paragrafo per il prodotto di due spazi si estendono senza alcuna difficoltà al prodotto di un numero finito di spazi; in particolare:

PROPOSIZIONE 1.8.16. .

- Vale la proprietà di universalità del prodotto: siano T e X_j spazi topologici e siano $f_j : T \rightarrow X_j$ funzioni, $j = 1, 2, \dots, n$, allora la funzione

$$h : a \in T \rightarrow (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

è continua se, e solo se, ogni f_j è continua.

- Il prodotto di un qualsiasi numero finito di spazi è connesso se, e solo se, i singoli fattori sono connessi.
- Il prodotto di un qualsiasi numero finito di spazi è compatto se, e solo se, i singoli fattori sono compatti.

1.8.1 Compattezza in \mathbb{R} e \mathbb{R}^n

Nel presente paragrafo supporremo \mathbb{R} e \mathbb{R}^n dotati della topologia naturale.

PROPOSIZIONE 1.8.17. (Teorema di E.Heine e E.Borel) Ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di \mathbb{R} , con la topologia naturale, è compatto.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti di \mathbb{R} tale che

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \tag{1.32}$$

e poniamo

$$X = \{x \in [a, b] : [a, x] \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t, T \text{ sottoinsieme finito di } J\}.$$

Osserviamo che X , contenendo il punto a , è non vuoto. Inoltre, l'estremo superiore y di X , essendo aderente a $X (\subseteq [a, b])$, è aderente anche ad $[a, b]$ e quindi appartiene ad $[a, b]$. Allora, in forza della (1.32), esistono un aperto $A_j \in \mathcal{A}$ contenente y e un $\epsilon > 0$ tale che $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subseteq A_j$. Così, essendo y aderente a X , esistono

- un punto $x \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \cap X$;
- un sottoinsieme finito $F \subseteq I$ tale che $[a, x] \subseteq \bigcup_{f \in F} A_f$

e risulta

$$[a, x] \cup (y - \epsilon, y + \epsilon) = [a, y + \epsilon] \subseteq \left(\bigcup_{f \in F} A_f \right) \cup A_j,$$

da cui

$$[a, b] \cap [a, y + \epsilon] \subseteq \left(\bigcup_{f \in F} A_f \right) \cup A_j$$

e, essendo $[a, b] \cap [a, y + \epsilon]$ contenuto nell'unione di un numero finito di elementi di \mathcal{A} ,

$$[a, b] \cap [a, y + \epsilon] \subseteq X; \quad (1.33)$$

in particolare $y \in X$. Ora, se supponiamo $y < b$, esiste un punto $z \in [a, b]$ con $y < z < y + \epsilon$ e quindi $z \in [a, b] \cap [a, y + \epsilon)$. Allora, in forza della (1.33), z appartiene a X e ciò è assurdo essendo $z > y$. In conclusione, risulta $y = b$ e l'asserto è provato. \square

PROPOSIZIONE 1.8.18. *In \mathbb{R}^n risultano compatti i seguenti sottospazi:*

- gli n -rettangoli (in particolare gli n -cubi) chiusi;
- gli intorni sferici chiusi;
- le superfici sferiche chiuse.

DIMOSTRAZIONE. In forza delle **Proposizioni 1.8.13, 1.8.17**, gli n -rettangoli chiusi sono compatti perché prodotti di intervalli compatti. Gli intorni sferici chiusi e le superfici sferiche sono chiusi contenuti in n -rettangoli chiusi (provarlo per esercizio), che sono spazi compatti, e quindi sono compatti in forza della **Proposizione 1.7.12**. \square

PROPOSIZIONE 1.8.19. (Teorema di E.Heine, S.Pincherle e E.Borel) *Un sottospazio Y di \mathbb{R}^n è compatto se, e solo se, è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Un sottospazio compatto Y di \mathbb{R}^n è anche chiuso, essendo \mathbb{R}^n uno spazio T_2 (cfr. **Proposizione 1.7.15**), ed è limitato in forza dell'**Esempio 1.7.7**. D'altra parte, un sottospazio Y chiuso e limitato di \mathbb{R}^n è contenuto in un intorno sferico chiuso S , che è compatto (cfr. **Esempio 1.8.18**). Allora Y , che è chiuso anche in S , è compatto perché sottospazio chiuso di uno spazio compatto (cfr. **Proposizione 1.7.12**). \square

ESEMPIO 1.8.20. ($GL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{R})$ non sono compatti) Il complementare del gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{n,n}$ (con la topologia naturale) è un chiuso perché controimmagine dello zero nella funzione continua

$$\det : A \in \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \det A \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che $GL(n, \mathbb{R})$ è aperto e non può essere chiuso perché $\mathbb{R}^{n,n}$ è connesso. Allora $GL(n, \mathbb{R})$ non è compatto in forza del precedente teorema. Tra l'altro, $GL(n, \mathbb{R})$ è anche non limitato (dimostrarlo per esercizio). Il gruppo $SL(n, \mathbb{R})$, invece, è un chiuso in quanto controimmagine di 1 nella funzione determinante. Anche questo gruppo non è compatto perché non limitato. \square

PROPOSIZIONE 1.8.21. (Una caratterizzazione dei compatti di \mathbb{R}^n) *Un sottospazio Y di \mathbb{R}^n è compatto se, e solo se, è compatto per successioni, cioè ogni suo sottoinsieme infinito possiede almeno un punto di accumulazione in Y .*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che Y sia compatto, e quindi chiuso (cfr. **Proposizione 1.8.19**), un suo sottoinsieme infinito X ha almeno un punto di accumulazione z (cfr. **Proposizione 1.7.19**) e risulta $z \in \overline{X} \subseteq Y$.

Proviamo ora che, se ogni sottoinsieme infinito di Y ha almeno un punto di accumulazione in Y , allora Y è limitato e chiuso.

Supponiamo per assurdo Y non limitato e sia \mathbf{y} un punto di Y . Per ogni naturale positivo n , scegliamo un punto $\mathbf{x}_n \in Y$ con $\mathbf{x}_n \notin D_n(\mathbf{y}) = \overline{B}_n(\mathbf{y})$, cioè $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) > n$, in modo che sia

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{n+1}) > d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n).$$

Allora $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\}$ è un sottoinsieme infinito di Y senza punti di accumulazione in Y . Infatti, \mathbf{y} e i punti \mathbf{x}_n , per costruzione, non sono di accumulazione per X . Se, invece, z è un punto di $Y \setminus (X \cup \{\mathbf{y}\})$ e $B_r(z)$ un suo intorno sferico aperto, sia m un intero tale che $m > d(\mathbf{y}, z) + r$. Allora

$$\mathbf{t} \in B_r(z) \Rightarrow d(\mathbf{t}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{t}, z) + d(z, \mathbf{y}) < r + d(z, \mathbf{y}) < m \Rightarrow B_r(z) \subseteq B_m(\mathbf{y}),$$

quindi $B_r(z)$ contiene un numero finito di punti di X perché $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \dots$ non appartengono a $B_m(\mathbf{y})$; di conseguenza z non può essere di accumulazione per X in forza della **Proposizione 1.4.22**. Abbiamo così un assurdo e quindi Y è necessariamente limitato.

Ci resta da provare che Y è chiuso. A tale scopo, se z è un punto di accumulazione di Y , possiamo costruire una successione infinita $\{\mathbf{x}_n\}$ di punti di Y tale che

$$d(\mathbf{x}_n, z) < \frac{1}{n}, \quad d(\mathbf{x}_{n+1}, z) < d(\mathbf{x}_n, z).$$

Per costruzione, $\{\mathbf{x}_n\}$ converge a z , che risulta pertanto punto di accumulazione per l'insieme infinito $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$. D'altra parte, per ipotesi, X possiede un punto di accumulazione \mathbf{y} in Y . Ora, supponendo per assurdo $z \neq \mathbf{y}$, consideriamo un intorno U di z e uno V di \mathbf{y} disgiunti e, poichè da un certo indice in poi tutti gli \mathbf{x}_m appartengono a U , necessariamente V contiene un numero finito di punti di X . Ciò è assurdo in forza della **Proposizione 1.4.22** e quindi $\mathbf{y} = z$. Ne segue che Y è chiuso. \square

1.9 Complementi

1.9.1 Compattificazione di Alexandrov

Per uno spazio topologico X non compatto è di notevole interesse trovare spazi compatti contenenti un sottospazio omeomorfo a X e, in qualche modo, minimali rispetto a questa proprietà. A tale scopo si dà la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.9.1. (Compattificazione) Siano X e K rispettivamente uno spazio topologico non compatto e uno compatto. Lo spazio K prende il nome di **compattificazione di X** se contiene un sottospazio omeomorfo a X e denso in K . \square

ESEMPIO 1.9.2. (Una compactificazione della superficie sferica bucata) Siano S^n la superficie sferica in \mathbb{R}^n e P un suo punto. Posto $X = S^n \setminus \{P\}$, si ha subito che S^n è una compactificazione di X . \square

Esistono diversi tipi di compactificazione di uno spazio non compatto. La più semplice si ottiene "aggiungendo" un unico punto allo spazio X di partenza e si chiama **compactificazione di P.S.Alexandrov** di X .

PROPOSIZIONE 1.9.3. (Compactificazione di P.S.Alexandrov) Sia (X, τ) uno spazio topologico non compatto e si ponga:

- $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, dove ∞ denota un elemento non appartenente a X (**punto all'infinito o improprio**);
- $\tau_\infty = \{A \cup \{\infty\}, \text{ con } X \setminus A \text{ sottospazio chiuso e compatto di } X\}$;
- $\hat{\tau} = \tau \cup \tau_\infty$.

Allora $\hat{\tau}$ è una topologia su \hat{X} e lo spazio $(\hat{X}, \hat{\tau})$ è una compactificazione di (X, τ) .

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a provare che $\hat{\tau}$ verifica gli assiomi degli aperti.

Risulta $\emptyset, \hat{X} \in \hat{\tau}$ perché $\emptyset \in \tau \subset \hat{\tau}$ e $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ ($X \setminus X = \emptyset$, che è chiuso e compatto in X).

Se $\{T_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di elementi di $\hat{\tau}$ e A l'unione degli elementi di tale famiglia, possiamo scrivere

$$A = \bigcup_{i \in I} T_i = \left(\bigcup_{T_i \in \tau} T_i \right) \cup \left(\bigcup_{T_i \notin \tau} T_i \right) = T \cup T',$$

ove

$$T = \bigcup_{T_i \in \tau} T_i \quad \text{e} \quad T' = \bigcup_{T_i \notin \tau} T_i$$

e, nell'ipotesi $T' \neq \emptyset$,

$$T' = \bigcup_{T_i \notin \tau} T_i = \bigcup_{T_i \notin \tau} (A_i \cup \{\infty\}) = \left(\bigcup_{T_i \notin \tau} A_i \right) \cup \{\infty\}$$

con $X \setminus A_i$ sottospazio chiuso e compatto di X . D'altra parte, abbiamo che

$$X \setminus \left(\bigcup_{T_i \notin \tau} A_i \right) = \bigcap_{T_i \notin \tau} (X \setminus A_i)$$

è chiuso in X , in quanto intersezione dei chiusi $X \setminus A_i$, ed è compatto, in quanto sottospazio chiuso dei compatti $X \setminus A_i$; cioè $T' \in \hat{\tau}$. In definitiva abbiamo provato che A è del tipo

$$A = T \cup (U \cup \{\infty\}) = (T \cup U) \cup \{\infty\},$$

con $T \in \tau$ e $X \setminus U$ sottospazio chiuso e compatto di X . Ora, risulta che

$$X \setminus (T \cup U) = (X \setminus T) \cap (X \setminus U)$$

è chiuso in X , in quanto intersezione dei chiusi $(X \setminus T)$, $(X \setminus U)$, ed è compatto, in quanto sottospazio chiuso del compatto $X \setminus U$; cioè $A \in \hat{\tau}$. Resta così provato che l'unione di una famiglia di elementi di $\hat{\tau}$ appartiene a $\hat{\tau}$.

Se T_1, T_2 sono elementi di τ è chiaro che $T_1 \cap T_2$ appartiene a τ . Se $T_1 = A_1 \cup \{\infty\}$, $T_2 = A_2 \cup \{\infty\}$ sono elementi di $\hat{\tau} \setminus \tau$, possiamo scrivere

$$T_1 \cap T_2 = (A_1 \cup \{\infty\}) \cap (A_2 \cup \{\infty\}) = (A_1 \cap A_2) \cup \{\infty\}$$

e

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$

è un sottospazio chiuso e compatto di X (cfr. **Esercizio 1.7.4**); cioè $T_1 \cap T_2 \in \hat{\tau}$. In modo analogo si vede che $T_1 \cap T_2 \in \hat{\tau}$ se $T_1 \in \tau$ e $T_2 \in \hat{\tau}$. Abbiamo così che l'intersezione di due elementi di $\hat{\tau}$ appartiene a $\hat{\tau}$ e con ciò resta provato che $\hat{\tau}$ è una topologia su \hat{X} .

Osserviamo esplicitamente che la topologia $\hat{\tau}$ di \hat{X} induce su X la topologia τ , quindi l'immersione $x \in X \rightarrow x \in \hat{X}$ risulta continua e da ciò segue che ogni sottospazio compatto di X è tale anche in \hat{X} . Inoltre, X non è chiuso in \hat{X} , altrimenti

$$\hat{X} \setminus X = \{\infty\} = \{\emptyset \cup \{\infty\}\}$$

dovrebbe essere un aperto e ciò non è vero perché $X \setminus \emptyset = X$ non è compatto in X . Ne segue che X è denso in \hat{X} .

Possiamo ora provare che \hat{X} è compatto. A tale scopo consideriamo un ricoprimento $\mathcal{U} = \{T_i\}_{i \in I}$ di aperti di \hat{X} e sia $T_j = A \cup \{\infty\}$ un elemento di \mathcal{U} contenente ∞ . Poiché $X \setminus A$ è un sottospazio compatto di \hat{X} , esiste un suo ricoprimento finito $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ e $\{A_j\} \cup \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ è un ricoprimento finito di \hat{X} . \square

ESEMPIO 1.9.4. (Compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} consideriamo una sfera S^n e un suo punto P . Non è difficile rendersi conto che la compactificazione di Alexandrov di $S^n \setminus \{P\}$ è omeomorfa a S^n . Allora, tenendo presente che $S^n \setminus \{P\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n (per esempio mediante la proiezione stereografica descritta nell'Esempio 1.9.4), si ha che **la compactificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n è omeomorfa a S^n** . \square

1.9.2 Prodotti di famiglie di spazi

Ricordiamo che, se $\{X_j\}_{j \in J}$ è una famiglia di insiemi, si definisce prodotto della famiglia, e si denota con $\prod_{j \in J} X_j$, l'insieme delle funzioni

$$f : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} X_j, \text{ con } f(j) \in X_j, \text{ per ogni } j \in J.$$

Se, per ogni $j \in J$, risulta $f(j) = a_j$, la funzione f si denota con $\{a_j\}_{j \in J}$ o più semplicemente con $\{a_j\}$. Per ogni $i \in J$, la funzione

$$p_i : \{a_j\} \in \prod_{j \in J} X_j \rightarrow a_i \in X_i$$

si chiama ***i*-ma proiezione**. Osserviamo che, se tutti gli X_j sono uguali ad un fissato insieme T , allora il prodotto $\prod_{j \in J} X_j$ coincide con l'insieme T^J di tutte le funzioni di J in T .

Se $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ è una famiglia di spazi topologici, la famiglia di sottoinsiemi di $\prod_{j \in J} X_j$ definita da

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{f \in F} p_f^{-1}(A_f) \right\}, \quad (1.34)$$

al variare di A_f in τ_f e di F tra i sottoinsiemi finiti di J , verifica gli assiomi delle basi. Si ha infatti che \mathcal{B} è un ricoprimento di $\prod_{j \in J} X_j$ e l'intersezione di due elementi di \mathcal{B} è ancora un elemento di \mathcal{B} . Ha quindi senso la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.9.5. (Prodotto di una famiglia di spazi) Sia $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ una famiglia di spazi topologici e \mathcal{B} la famiglia di sottoinsiemi di $\prod_{j \in J} X_j$ definita dalla

(1.34). L'unica topologia τ su $\prod_{j \in J} X_j$ per cui \mathcal{B} è una base prende il nome di **prodotto delle topologie** τ_j e lo spazio topologico $(\prod_{j \in J} X_j, \tau)$ si dice **prodotto degli spazi** (X_j, τ_j) . \square

OSSERVAZIONE 1.9.6. Se J è un insieme finito, e sia $J = \{1, 2, \dots, n\}$, allora per la famiglia \mathcal{B} definita dalla (1.34) risulta

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \text{ con } A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2, \dots, A_n \in \tau_n\},$$

cioè \mathcal{B} si riduce alla base degli aperti elementari nella topologia prodotto su $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Ne segue che, in questo caso, la topologia τ introdotta nella **Definizione 1.9.5** coincide la topologia prodotto su $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. \square

Come nel caso di un prodotto finito, **la topologia prodotto τ è la meno fine tra le topologie su $\prod_{j \in J} X_j$ per cui risultano continue tutte le proiezioni p_j .**

Nella proposizione che segue riportiamo, senza dimostrazione, tre importanti proprietà dei prodotti infiniti.

PROPOSIZIONE 1.9.7. .

- *Vale la proprietà di universalità del prodotto:* siano T uno spazio topologico, $\{X_j\}_{j \in J}$ una famiglia di spazi topologici e siano $f_j : T \rightarrow X_j$ funzioni, $j \in J$, allora la funzione

$$h : a \in T \rightarrow \{f_j(a)\}_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$$

è continua se, e solo se, ogni f_j è continua.

- *Il prodotto di una famiglia di spazi è connesso se, e solo se, i singoli fattori sono connessi.*
- **(Teorema di A.N.Tychonoff)** *Il prodotto di una famiglia di spazi è compatto se, e solo se, i singoli fattori sono compatti.*

ESEMPI 1.9.8. Gli esempi che seguono sono casi particolarmente interessanti di topologie su $\prod_{j \in J} X_j = T^J$, nell'ipotesi che tutti gli X_j siano uguali ad un fissato spazio topologico T .

- Quando $J = \mathbb{N}^+$ si ottiene una topologia sull'insieme delle successioni degli elementi di T .
- Per $J = \mathbb{N}$ e $T = [0, 1]$, lo spazio che si ottiene si chiama **cubo di Hilbert**.
- Per $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{R}$ si ottiene una topologia sull'insieme delle funzioni di $[a, b]$ in \mathbb{R} che si chiama **topologia della convergenza puntuale**. \square

1.10 Quozienti

In \mathbb{R}^3 una circonferenza X e una curva semplice chiusa Y con qualche nodo, per esempio un nodo a trifoglio (**Figura 1.14**), sono sottospazi omeomorfi. Per rendercene conto suddividiamo X e Y in due archi chiusi consecutivi e concordemente orientati mediante i punti x_1, x_2 e y_1, y_2 , rispettivamente.

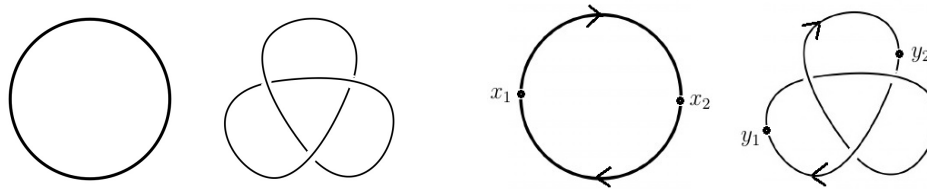


Figura 1.14: Circonferenza e nodo a trifoglio

In tal modo abbiamo due archi X_1, X_2 su X rispettivamente di primo e secondo estremo x_1, x_2 e x_2, x_1 e, analogamente, due archi Y_1, Y_2 su Y rispettivamente di primo e secondo estremo y_1, y_2 e y_2, y_1 . Allora esistono due omeomorfismi

$$f_1 : X_1 \rightarrow Y_1, \quad f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$$

tali che

$$f_1(x_1) = f_2(x_1) = y_1, \quad f_1(x_2) = f_2(x_2) = y_2$$

e la funzione $f : X \rightarrow Y$, definita da

$$a \in X, \quad f(a) = f_j(a) \iff a \in X_j, \quad j = 1, 2,$$

risulta un omeomorfismo tra X e Y . Questo esempio è interessante perché mostra due sottospazi di \mathbb{R}^3 tra loro omeomorfi che, parlando in modo informale, non possono trasformarsi l'uno nell'altro mediante "deformazioni continue" effettuate in \mathbb{R}^3 : per poterlo fare si dovrebbe fuoriuscire da \mathbb{R}^3 , operare in \mathbb{R}^4 (cosa soltanto intuibile e non realizzabile praticamente) e tornare infine in \mathbb{R}^3 . Così, se vogliamo individuare delle trasformazioni che realizzino un omeomorfismo tra sottospazi di \mathbb{R}^3 rimanendo in \mathbb{R}^3 , dobbiamo modificare la nostra nozione intuitiva di omeomorfismo ammettendo che, oltre alle "deformazioni continue" in \mathbb{R}^3 , siano lecite anche delle "nuove operazioni". Nel nostro caso, per esempio, volendo "deformare" la circonferenza X nel nodo Y , potremmo "tagliare" Y in un punto, "sciogliere il nodo" e infine "incollare" laddove abbiamo tagliato: il sottospazio ottenuto potrà adesso trasformarsi in una circonferenza mediante una "deformazione continua" secondo la nostra nozione intuitiva e rimanendo in \mathbb{R}^3 .

I *quozienti* di spazi topologici, di cui inizieremo lo studio in questo paragrafo, permettono di descrivere nuove operazioni che si utilizzano in diverse situazioni e in contesti molto generali. Tra queste, per esempio, ritroviamo descritte in modo rigoroso le cosiddette operazioni di "*taglia e incolla*" appena illustrate relativamente al nodo a trifoglio e altre simili.

Siano \sim una relazione d'equivalenza su un insieme X e X/\sim il relativo insieme quoziente, cioè l'insieme delle classi di equivalenza di X rispetto a \sim . Se denotiamo con $[a]$ la classe d'equivalenza dell'elemento $a \in X$, la funzione suriettiva

$$\pi : a \in X \rightarrow [a] \in X/\sim \quad (1.35)$$

si chiama **proiezione canonica** di X sul quoziente X/\sim . Se T è un sottoinsieme di X , l'immagine $\pi(T)$ di T in π si dice **proiezione di T** .

Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione tra due insiemi X e Y , la relazione \sim_f definita da

$$a, b \in X, \quad a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \quad (1.36)$$

è di equivalenza su X e si dice **associata ad f** . La classe di equivalenza di un elemento $a \in X$ rispetto a \sim_f sarà denotata con $[a]_f$, o semplicemente con $[a]$ se non vi è luogo ad equivoci. Denoteremo, inoltre, con π_f la **proiezione canonica** di X su X/\sim_f . È ben noto che la *funzione*

$$\varphi_f : [a]_f \in X/\sim_f \rightarrow f(a) \in f(X)$$

è biunivoca ed è l'unica che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & f(X) \\ \pi_f \downarrow & \nearrow \varphi_f & \\ X/\sim_f & & \end{array} \quad (1.37)$$

cioè $f(a) = \varphi_f(\pi_f(a))$, per ogni $a \in X$.

Da notare che, se \sim è una relazione di equivalenza su X e π la proiezione canonica (1.35), le due relazioni \sim e \sim_π coincidono.

I richiami precedenti mostrano che **assegnare una funzione suriettiva f tra due insiemi X e Y equivale ad assegnare su X la relazione d'equivalenza \sim_f (1.36) e la funzione φ_f . In questa situazione, Y si può identificare col quoziente di X rispetto a \sim_f e f con la proiezione canonica di X su questo quoziente. Questa osservazione giustifica la seguente definizione.**

DEFINIZIONE 1.10.1. (Topologia quoziente) Siano (X, τ) uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva. La famiglia

$$\tau_f = \{T \subseteq Y \text{ tale che } f^{-1}(T) \in \tau\}$$

è una topologia su Y (cfr. **Esempio 1.3.14**), che prende il nome di **topologia quoziente** di X rispetto a f . Lo spazio topologico (Y, τ_f) si chiama **spazio quoziente** e si denota anche con X/f . Se \sim è una relazione d'equivalenza sui punti di X , la topologia quoziente τ_π di X rispetto alla proiezione canonica $\pi : X \rightarrow X/\sim$ prende il nome di **topologia quoziente** di X rispetto alla relazione \sim e lo spazio topologico $(X/\sim, \tau_\pi)$ si chiama **spazio quoziente**. \square

Osserviamo esplicitamente che, se \sim è una relazione d'equivalenza sui punti dello spazio topologico X e $\pi : X \rightarrow X/\sim$ la proiezione canonica, **un sottoinsieme A dello spazio X/\sim è aperto nella topologia quoziente se, e solo se, $\pi^{-1}(A)$ è un aperto di X .**

PROPOSIZIONE 1.10.2. Siano (X, τ) uno spazio topologico, $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva di X su un insieme Y , τ_f la topologia quoziente di X rispetto a f e τ_{π_f} la topologia quoziente di X rispetto alla relazione \sim_f . Allora, con riferimento al diagramma commutativo (1.38), si ha che f e π_f sono continue e φ_f è un omeomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni f e π_f sono continue per definizione: le controimmagini in f degli aperti di Y e quelle in π_f degli aperti di X/\sim_f sono aperti in X . La funzione φ_f è biunivoca perchè f è suriettiva. Ora, se A è un aperto di Y , $f^{-1}(A)$ è un aperto di X e, essendo

$$f^{-1}(A) = (\varphi_f \circ \pi_f)^{-1}(A) = \pi_f^{-1}(\varphi_f^{-1}(A))$$

abbiamo che $\varphi_f^{-1}(A)$ è un aperto di X/\sim_f e φ_f è continua.

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_f) \\ \pi_f \downarrow & \nearrow \varphi_f & \\ (X/\sim_f, \tau_{\pi_f}) & & \end{array} \quad (1.38)$$

Figura 1.15: Proposizione 1.10.2

Infine, se T è un aperto di X/\sim_f , $\pi_f^{-1}(T)$ è un aperto in X e, essendo

$$f^{-1}(\varphi_f(T)) = \pi_f^{-1}(\varphi_f^{-1}(\varphi_f(T))) = \pi_f^{-1}(T),$$

abbiamo che $\varphi_f(T)$ è un aperto di Y , cioè φ_f è aperta. Resta così provato che φ_f è un omeomorfismo. \square

PROPOSIZIONE 1.10.3. *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione suriettiva. Allora f è continua tra gli spazi topologici (X, τ) e (Y, σ) se, e solo se, la topologia σ di Y è meno fine della topologia quoziente τ_f . Ne segue che τ_f è la più fine tra le topologie su Y che rende f continua rispetto a (X, τ) .* \square

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ continua. Allora la controimmagine $f^{-1}(A)$ di un aperto A di (Y, σ) è un aperto di (X, τ) e, quindi, A è un aperto nella topologia quoziente, cioè $\sigma \leq \tau_f$. Viceversa, se $\sigma \leq \tau_f$, un aperto A in σ è anche un aperto in τ_f e, quindi, $f^{-1}(A)$ è un aperto in τ . Ne segue che f è continua rispetto a σ e l'asserto è provato. \square

Osserviamo che la proposizione appena provata, nel caso delle relazioni d'equivalenza, si specializza nel modo seguente.

PROPOSIZIONE 1.10.4. *La topologia quoziente di uno spazio topologico X rispetto ad una relazione d'equivalenza \sim è la più fine tra le topologie su X/\sim per cui la proiezione $\pi : X \rightarrow X/\sim$ è continua.*

ESEMPIO 1.10.5. (Le proiezioni non sono in generale né aperte né chiuse) In \mathbb{R} con la topologia naturale consideriamo la relazione d'equivalenza \sim che identifica i punti dell'intervallo $[0, 1)$, cioè

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a \sim b \Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a, b \in [0, 1).$$

È chiaro che il sostegno dello spazio quoziente X/\sim può identificarsi con l'insieme $(-\infty, 0) \cup \{y\} \cup [1, +\infty)$, ove y rappresenta la classe d'equivalenza $[0, 1)$ e ogni punto di $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ coincide con la propria classe d'equivalenza. Ora, se π è la proiezione canonica di \mathbb{R} su \mathbb{R}/\sim , la controimmagine $\pi^{-1}(y) = [0, 1)$ non è né aperta né chiusa in \mathbb{R} e, quindi, y non è né aperto né chiuso in \mathbb{R}/\sim . D'altra parte, $(0, 1)$ e $[0, \frac{1}{2}]$ sono rispettivamente un aperto e un chiuso di X e risulta $\pi((0, 1)) = \pi[0, \frac{1}{2}] = y$. Così π non è né aperta né chiusa. \square

Ricordiamo che, data una funzione suriettiva $f : X \rightarrow Y$ fra due insiemi X e Y ,

- un sottoinsieme S di X si dice **saturo**, rispetto a f , se risulta $S = f^{-1}f(S)$, cioè se risulta unione di classi d'equivalenza rispetto alla relazione \sim_f ;
- se $T \subseteq X$, il sottoinsieme saturo $f^{-1}f(T) (\supseteq T)$ si dice **saturazione di T** (rispetto a f).

Analogamente, se \sim è una relazione d'equivalenza su X , un sottoinsieme S di X si dice **saturo**, rispetto a \sim , se è unione di classi di equivalenza, cioè se è saturo rispetto alla proiezione canonica π di X su X/\sim .

DEFINIZIONE 1.10.6. (Identificazioni) Una funzione continua e suriettiva tra due spazi topologici $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ prende il nome di **identificazione** se σ coincide con la topologia quoziente τ_f di X rispetto a f . \square

PROPOSIZIONE 1.10.7. (Identificazioni e aperti saturi) Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ un'identificazione e denotiamo con \mathcal{A}_f l'insieme degli aperti saturi di X . Allora, per ogni aperto saturo A di X , l'immagine $f(A)$ è un aperto di Y e la funzione

$$F : A \in \mathcal{A}_f \rightarrow f(A) \in \sigma$$

è biunivoca. In altre parole, gli aperti di Y sono tutti e soli le immagini in f degli aperti saturi di X . Equivalentemente, se \sim è una relazione di equivalenza sui punti di (X, τ) , gli aperti dello spazio quoziente X/\sim sono tutte e sole le proiezioni degli aperti saturi di X .

DIMOSTRAZIONE. Se A è un aperto saturo di X , risulta $A = f^{-1}(f(A))$ e dalla definizione di topologia quoziente segue che $f(A)$ è un aperto di Y . La funzione F è suriettiva perchè, per ogni aperto T di Y , risulta $f^{-1}(T) = f^{-1}(f(f^{-1}(T)))$, cioè $f^{-1}(T)$ è un aperto saturo di X tale che $F(f^{-1}(T)) = f(f^{-1}(T)) = T$. La funzione F è anche iniettiva perchè, se A, B sono aperti saturi di X tali che $F(A) = F(B)$, risulta $A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(F(A)) = f^{-1}(F(B)) = f^{-1}(f(B)) = B$. \square

OSSERVAZIONE 1.10.8. Se X è uno spazio topologico e X/\sim un suo quoziente, possono esistere aperti non saturi di X la cui proiezione è un aperto di X/\sim , come mostra l'esempio che segue. In $X = [-1, 1]$ con la topologia naturale consideriamo la relazione d'equivalenza \sim che identifica i punti dell'intervallo $(-1, 1)$ simmetrici rispetto a 0, cioè

$$a, b \in X, \quad a \sim b \Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a = -b, \quad \text{se} \quad -1 < a, b < 1.$$

È chiaro che il sostegno dello spazio quoziente X/\sim può identificarsi con l'insieme $\{-1\} \cup [0, 1]$, ove ogni punto $a \in (0, 1)$ rappresenta la classe d'equivalenza $\{-a, a\}$ e $-1, 0, 1$ sono le classi d'equivalenza rispettivamente di $-1, 0, 1$. Ora, l'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$ è un aperto non saturo di X e risulta $\pi((\frac{1}{2}, 1)) = (\frac{1}{2}, 1)$. D'altra parte, $\pi^{-1}(\pi((\frac{1}{2}, 1))) = \pi^{-1}((\frac{1}{2}, 1)) = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ è un aperto di X e, quindi, $\pi((\frac{1}{2}, 1))$ è un aperto di X/\sim . \square

ESERCIZIO 1.10.9. (Identificazioni e chiusi saturi) Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ un'identificazione e denotiamo con $\mathcal{C}(Y)$ e \mathcal{C}_f rispettivamente l'insieme dei chiusi di Y e quello dei chiusi saturi di X . Provare che, per ogni chiuso saturo C di X , l'immagine $f(C)$ è un chiuso di Y e la funzione

$$F : C \in \mathcal{C}_f \rightarrow f(C) \in \mathcal{C}(Y)$$

è biunivoca. In altre parole, i chiusi Y sono tutte e sole le immagini in f dei chiusi saturi di X . Equivalentemente, se \sim è una relazione di equivalenza sui punti di (X, τ) , i chiusi dello spazio quoziente X/\sim sono tutte e sole le proiezioni dei chiusi saturi di X . \square

ESERCIZIO 1.10.10. (Identificazioni e omeomorfismi) Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione tra due spazi topologici. Provare che f è un omeomorfismo se, e solo se, f è un'identificazione biunivoca e aperta (chiusa). \square

ESEMPIO 1.10.11. (Contrazione a un punto di un sottospazio) Siano X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio e \sim_Y la relazione d'equivalenza definita da

$$a, b \in X, \quad a \sim_Y b \Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a, b \in Y. \quad (1.39)$$

Lo spazio quoziente X/\sim_Y , che si denota con X/Y , si dice **ottenuto da X mediante contrazione ad un punto del sottospazio Y** e il sostegno di tale spazio può identificarsi con l'unione di $X \setminus Y$ e di un punto y (corrispondente alla classe d'equivalenza Y). Se $\pi : X \rightarrow X/Y$ è la proiezione canonica di X sul quoziente, risulta $\pi(a) = a$, se $a \notin Y$, e $\pi(a) = y$, se $a \in Y$, per ogni $a \in X$.

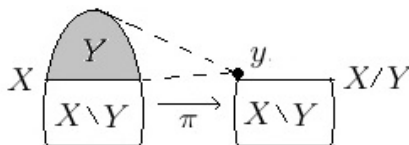


Figura 1.16: Esempio 1.10.11

Ne segue che gli aperti (i chiusi) saturi di X sono tutti e soli quelli che risultano ad intersezione vuota con Y e quelli che contengono Y . Allora gli aperti (i chiusi) di $X/Y = (X \setminus Y) \cup \{y\}$ sono gli aperti (i chiusi) di X ad intersezione vuota con Y e gli insiemi del tipo $(A \setminus Y) \cup \{y\}$, con A aperto (chiuso) di X contenente Y . Da quanto appena osservato segue che, se Y è aperto (chiuso) in X , il punto $y \in X/Y$ è un aperto (chiuso) nella topologia quoziente. Per esempio, nel quoziente $\mathbb{R}/(0, 1)$ il punto corrispondente alla proiezione di $(0, 1)$ è aperto e nel quoziente $\mathbb{R}/[0, 1]$ il punto corrispondente alla proiezione di $[0, 1]$ è chiuso. \square

ESERCIZIO 1.10.12. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua e suriettiva fra gli spazi topologici X, Y . Provare che:

- se l'immagine $f(A)$ di ogni aperto saturo A di X è un aperto di Y allora f è un'identificazione;
- se f è aperta (o chiusa) è un'identificazione. \square

PROPOSIZIONE 1.10.13. (Universalità del quoziente) Siano X, Y, T spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ un'identificazione e $g : Y \rightarrow T$ una funzione. Allora $g \circ f$ è continua se, e solo se, g è continua.

DIMOSTRAZIONE. La composizione di due funzioni continue è continua e così, se g è continua, $g \circ f$ è continua. Ora, se assumiamo $g \circ f$ continua, anche g è continua perchè, per ogni aperto A di T ,

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

è un aperto di X e, quindi, $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y . \square

PROPOSIZIONE 1.10.14. (Omeomorfismi di quozienti) Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ un omeomorfismo e \sim_X, \sim_Y relazioni d'equivalenza rispettivamente su X e Y . Allora, se vale la proprietà

$$a, b \in X, \quad a \sim_X b \Leftrightarrow f(a) \sim_Y f(b)$$

la funzione

$$F : [a] \in X / \sim_X \rightarrow [f(a)] \in Y / \sim_Y$$

è un omeomorfismo. \square

DIMOSTRAZIONE. Siano π_X e π_Y le proiezioni canoniche di X e Y rispettivamente su X / \sim_X e Y / \sim_Y . La funzione $\pi_Y \circ f$ è continua perchè composizione di due funzioni continue. Allora, risultando $F \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$, la F è **continua** per il teorema di universalità del quoziente. Se $a, b \in X$, risulta

$$F([a]) = F([b]) \Leftrightarrow [f(a)] = [f(b)] \Leftrightarrow f(a) \sim_Y f(b) \Leftrightarrow a \sim_X b \Leftrightarrow [a] = [b],$$

cioè F è **iniettiva**. Se $[y] \in Y / \sim_Y$, esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ perchè f è biunivoca, e $F([x]) = [f(x)] = [y]$, cioè F è **suriettiva**. La funzione $\pi_X \circ f^{-1}$ è continua perchè composizione di due funzioni continue. Allora, risultando $F^{-1} \circ \pi_Y = \pi_X \circ f^{-1}$, l'**inversa** F^{-1} di F è **continua** per il teorema di universalità del quoziente. In conclusione, F è un omeomorfismo. \square

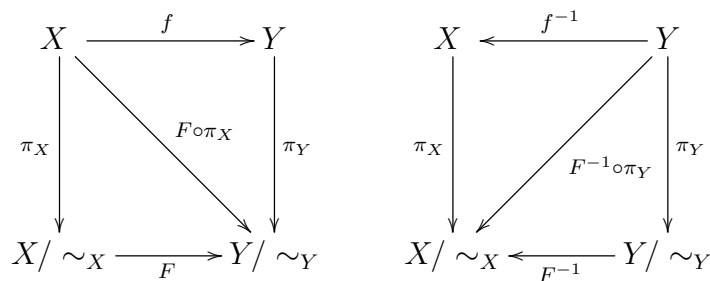


Figura 1.17: Proposizione 1.10.14

Assegnati due insiemi X e Y , una relazione d'equivalenza \sim su X e una funzione $f : X \rightarrow Y$, si dice che f **passa al quoziente**, o che è **compatibile con la relazione** \sim , se è verificata la proprietà

$$a, b \in X, \quad a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b) \tag{1.40}$$

e, in questo caso, risulta ben definita la funzione (**associata a f**)

$$F : [a] \in X/\sim \longrightarrow f(a) \in Y$$

cioè $f = F \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di X sul quoziente X/\sim .

PROPOSIZIONE 1.10.15. *Siano X, Y spazi topologici, \sim una relazione d'equivalenza su X e $f : X \rightarrow Y$ una funzione compatibile con \sim . Allora f è continua se, e solo se, è continua la funzione $F : [a] \in X/\sim \rightarrow f(a) \in Y$ associata a f .*

DIMOSTRAZIONE. È un immediato corollario della proprietà di universalità del quoziente. \square

ESEMPIO 1.10.16. $((S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\})$ è omeomorfo a D^2) Posto

$$S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad I = [0, 1],$$

$$X = S^1 \times I = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 1\},$$

$$A = S^1 \times \{1\} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \subset X,$$

osserviamo che X è il cilindro circolare retto di altezza 1 avente per basi le circonferenze S^1 e $A = S^1 \times \{1\}$. Se consideriamo il quoziente di X ottenuto per contrazione della base A ad un punto con la relativa relazione d'equivalenza \sim_A su X (cfr. **Esempio 1.39**), la funzione

$$f : X \rightarrow D^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

definita da

$$f(x, y, t) = ((1-t)x, (1-t)y, 0), \quad (x, y, 0) \in S^1, \quad t \in I$$

è suriettiva. Infatti, $f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ e, se $(a, b, 0) \in D^2 \setminus \{0\}$ e $(x, y, 0)$ è l'unico punto di S^1 sulla semiretta di origine $(0, 0, 0)$ passante per $(a, b, 0)$, esiste un unico $t \in I$ tale che $(a, b, 0) = (1-t)(x, y, 0)$ e, quindi, risulta $f(x, y, t) = (a, b, 0)$.

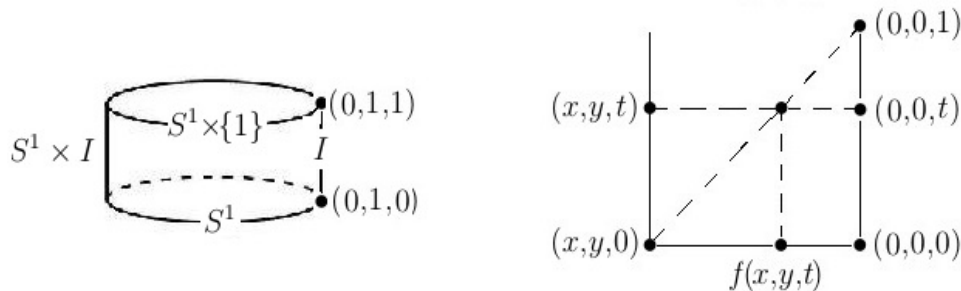


Figura 1.18: Esempio 1.10.16

Inoltre f è continua perché tale in ciascuna delle componenti (cfr. **Corollario 1.8.9**) ed è compatibile con la relazione d'equivalenza su \sim_A perché iniettiva su $X \setminus A$ e $f(A) = (0, 0, 0)$. Pertanto resta ben definita la funzione continua (cfr. **Proposizione 1.10.15**)

$$F : [(x, y, t)] \in X/Y \rightarrow f(x, y, t) \in D^2,$$

che, essendo f suriettiva, risulta biunivoca. Allora, dalla compattezza di X segue che F è un omeomorfismo (cfr. **Proposizione 1.7.24**). \square

Ricordando che la connessione e la compattezza si conservano per continuità e che la proiezione canonica di uno spazio topologico su un suo quoziente è continua, si ha subito la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.10.17. *Un quoziente di uno spazio connesso è connesso. Un quoziente di uno spazio compatto è compatto.*

OSSERVAZIONE 1.10.18. Siano X uno spazio topologico T_1 con $|X| > 1$, x un suo punto non aperto e \sim la relazione d'equivalenza su X che identifica tra loro i punti di $X \setminus \{x\}$. Lo spazio quoziente X/\sim contiene esattamente due punti ed è dotato della topologia con tre aperti, che non è T_1 . Questo esempio mostra che la proprietà T_1 non si conserva nel passaggio al quoziente. Più in generale, non è difficile rendersi conto che **gli assiomi di separazione non si conservano nel passaggio al quoziente**. \square

1.10.1 Esempi

Ricordiamo che, posto

$$I = [0, 1] = \text{intervallo unitario chiuso di } \mathbb{R},$$

$$\mathbb{R}^n = \text{spazio euclideo } n\text{-dimensionale},$$

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} = \text{superficie sferica unitaria di dimensione } n-1,$$

$$D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq 1\} = \text{sfera unitaria chiusa di dimensione } n,$$

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} = \text{sfera unitaria aperta di dimensione } n,$$

con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , a seconda del caso, risulta:

$$\overline{B^n} = D^n, \quad \overset{\circ}{D^n} = B^n, \quad \partial B^n = \partial D^n = S^{n-1}.$$

ESEMPIO 1.10.19. ($I/\{0, 1\}$ è omeomorfo a S^1) Posto $X = I = [0, 1]$ con la topologia naturale, $Y = \partial I = \{0, 1\}$, consideriamo il quoziente di I ottenuto per contrazione ad un punto di Y con la relativa relazione d'equivalenza \sim_Y su X (cfr. **Esempio**

1.39) e la funzione continua (cfr. **Corollario 1.8.9)**

$$f : t \in [0, 1] \rightarrow (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1.$$

Osserviamo che, risultando $f(0) = f(1)$, è ben definita la funzione

$$F : [a] \in X/Y \rightarrow f(a) \in S^1,$$

per la quale risulta $f = F \circ \pi$, ove π è la proiezione canonica di X su X/Y .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \pi \downarrow & \nearrow F & \\ X/Y & & \end{array}$$

Figura 1.19: Esempio 1.10.19

La funzione F è biunivoca, perché f è suriettiva, ed è continua per la proprietà di universalità del quoziente. Ora, X/Y è compatto, perché immagine continua mediante π dello spazio compatto X , e S^1 è T_2 ; quindi F è un omeomorfismo (cfr. **Proposizione 1.7.24**) tra X/Y e S^1 .

Notiamo che si può pervenire allo stesso risultato anche provando che f è un'identificazione e usando la **Proposizione 1.10.2**. A tale scopo, essendo f continua e suriettiva, basta far vedere che gli aperti di S^1 , cioè le unioni di archi aperti di S^1 , sono tutti e soli le immagini in f degli aperti saturi di $[0, 1]$. Gli aperti saturi di $[0, 1]$ sono:

- (a) le unioni di intervalli aperti contenuti in $(0, 1)$,
- (b) le unioni di intervalli aperti contenuti in $(0, 1)$ unite ad un insieme del tipo $[0, t) \cup (s, 1] \subseteq [0, 1]$,

e le immagini in f di questi insiemi sono tutte e sole le unioni di archi aperti di S^1 . Si ha così che f è un'identificazione.

È da osservare che la restrizione di f a $(0, 1]$, pur essendo biunivoca, non è un omeomorfismo perché, per esempio, $(\frac{1}{2}, 1]$ è aperto in X ma $f((\frac{1}{2}, 1])$ non è aperto in S^1 . \square

ESEMPIO 1.10.20. (D^n/S^{n-1} è omeomorfo a S^n) Generalizzando il risultato dell'**Esempio 1.10.19**, si ha che il quoziente di D^n ottenuto per contrazione ad un punto della sua frontiera $\partial D^n = S^{n-1}$ è omeomorfo a S^n . Infatti, la funzione

$$f : \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in D^n \rightarrow f(\mathbf{t}) \in S^n$$

definita da

$$f(\mathbf{t}) = \left(2t_1 \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, 2t_2 \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, \dots, 2t_n \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n t_j^2}, 2 \sum_{j=1}^n t_j^2 - 1 \right)$$

assume lo stesso valore sui punti di S^{n-1} e si può provare che è un'identificazione. In particolare, se in un cerchio chiuso del piano si contrae ad un punto la circonferenza che lo delimita, si ottiene uno spazio omeomorfo alla superficie sferica S^2 in \mathbb{R}^3 (per una dimostrazione si veda [9], pag. 76). \square

ESEMPIO 1.10.21. (Il cilindro) In \mathbb{R}^2 il quadrato $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ può identificarsi con il prodotto $I \times I$. Definiamo *cilindro (topologico)* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al cilindro circolare retto di \mathbb{R}^3

$$\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq t \leq 1\} = S^1 \times I.$$

È possibile provare che la funzione

$$f : (x, y) \in I \times I \rightarrow (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y) \in S^1 \times I$$

è un'identificazione (cfr. [9], pag. 78) e, di conseguenza, il quoziente $C = (I \times I)/f$ è omeomorfo al cilindro $S^1 \times I$. Da notare che nella relazione d'equivalenza \sim_f sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, y)$ viene identificato col punto $(1, y)$, per ogni $y \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso.

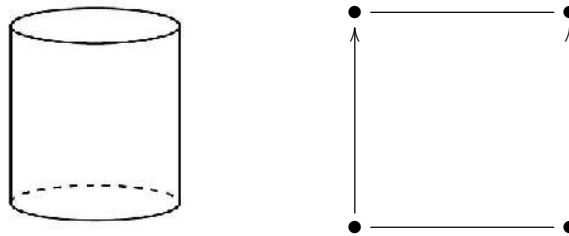


Figura 1.20: Il cilindro

Valgono inoltre le seguenti proprietà (provarle per esercizio):

1. La proiezione sul cilindro $C = (I \times I)/f$ dei segmenti di estremi $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, $(1, 1)$ contenuti in $I \times I$ è l'unione di due chiusi disgiunti (nel caso di un cilindro circolare retto consiste dell'unione delle due circonferenze di base).
2. Per $0 < t < 1$, la proiezione sul cilindro $C = (I \times I)/f$ del segmento di estremi $(0, t)$, $(1, t)$ contenuto in $I \times I$ è un chiuso Γ che sconnette il cilindro, cioè $C \setminus \Gamma$ è sconnesso.
3. Una corona circolare chiusa di \mathbb{R}^2 è un cilindro topologico. \square

ESEMPIO 1.10.22. (Il nastro di Möbius) Si chiama *nastro di Möbius* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al sottospazio \mathcal{M} di \mathbb{R}^3 i cui punti

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

con $0 \leq s, t \leq 1$, sono definiti da

$$\begin{aligned}x(s, t) &= \cos 2\pi s + \left(t - \frac{1}{2}\right) \sin \pi s \cos 2\pi s, \\y(s, t) &= \sin 2\pi s + \left(t - \frac{1}{2}\right) \sin \pi s \sin 2\pi s, \\z(s, t) &= \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos \pi s .\end{aligned}$$

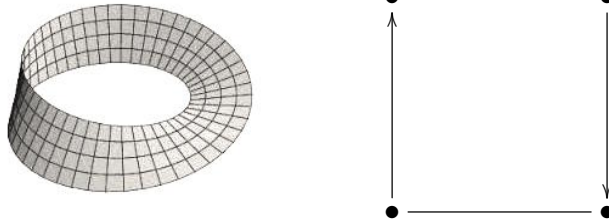


Figura 1.21: Il nastro di Möbius

È da osservare che \mathcal{M} risulta omeomorfo alla superficie algebrica del terzo ordine con equazione $y - x^2y - y^3 + 2xz + 2x^2z + 2y^2z - yz^2 = 0$.

Analogamente a quanto osservato nell'**Esercizio 1.10.21** è possibile provare che la funzione

$$f : (s, t) \in I \times I \rightarrow P(s, t) \in \mathcal{M}$$

è un'identificazione e, di conseguenza, il quoziente $\mathbf{M} = (I \times I)/f$ è omeomorfo ad un nastro di Möbius. Da notare che nella relazione d'equivalenza \sim_f sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, t)$ viene identificato col punto $(1, 1 - t)$, per ogni $t \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso. È possibile provare che il nastro di Möbius non si può immergere in \mathbb{R}^2 senza autointersezioni.

Valgono inoltre le seguenti proprietà (provarle per esercizio):

1. La proiezione sul nastro di Möbius $\mathbf{M} = (I \times I)/f$ dell'unione dei segmenti di estremi $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, $(1, 1)$ contenuti in $I \times I$ è un chiuso connesso omeomorfo ad una circonferenza.
2. Per $0 < t < 1$, la proiezione sul nastro di Möbius $\mathbf{M} = (I \times I)/f$ del segmento di estremi $(0, t)$, $(1, 1 - t)$ contenuto in $I \times I$ è un chiuso Γ che non sconnette il nastro di Möbius, cioè $\mathbf{M} \setminus \Gamma$ è connesso. \square

ESEMPIO 1.10.23. (Il toro) Si chiama *toro* un qualsiasi spazio topologico omeomorfo al sottospazio \mathbf{T} di \mathbb{R}^3 i cui punti

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)),$$

con $0 \leq s, t \leq 1$, sono definiti dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(s, t) &= (2 + \cos 2\pi s) \cos 2\pi t, \\y(s, t) &= (2 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi t,\end{aligned}$$

$$z(s, t) = \sin 2\pi s.$$

È da osservare che \mathbf{T} ha equazione cartesiana

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^3 - 1 = 0.$$

Inoltre, ricordando che $S^1 = \{(\cos 2\pi\varphi, \sin 2\pi\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq 1\}$, si ha che la funzione

$$((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, 2\pi \sin t)) \in S^1 \times S^1 \rightarrow P(s, t) \in \mathbf{T}$$

è un omeomorfismo tra il prodotto $S^1 \times S^1$ di due circonferenze e il toro \mathbf{T} .

Analogamente a quanto osservato nell'Esercizio 1.10.21 è possibile provare che la funzione

$$f : (s, t) \in I \times I \rightarrow P(s, t) \in \mathbf{T}$$

è un'identificazione e, di conseguenza, il quoziente $(I \times I)/f$ è omeomorfo ad un toro. Da notare che, nella relazione d'equivalenza \sim_f sui punti del quadrato $I \times I$, il punto $(0, t)$ viene identificato col punto $(1, t)$, il punto $(s, 0)$ col punto $(s, 1)$, per ogni $s, t \in I$, e ogni altro punto è equivalente solo a se stesso. In particolare restano tra loro identificati i quattro punti $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$, cioè i vertici del quadrato $I \times I$.

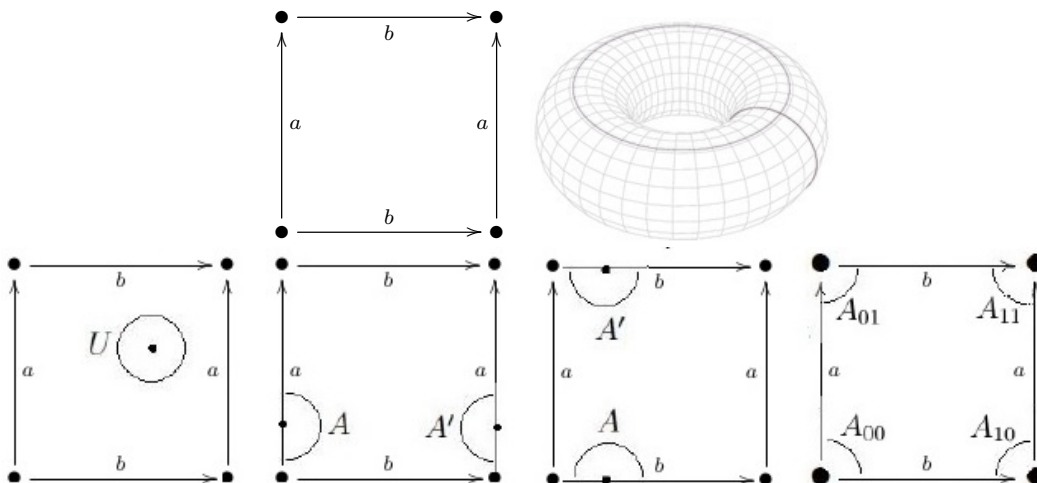


Figura 1.22: Il toro

Notiamo che se $\mathbf{a} = \pi(\mathbf{a})$ è il punto del toro proiezione di un punto \mathbf{a} interno a $I \times I$ e $U = B_\epsilon(\mathbf{a})$ un intorno circolare aperto di \mathbf{a} contenuto nell'interno di $I \times I$, allora U è un aperto saturo, così $\pi(U) = U$ è un aperto del toro contenente \mathbf{a} e omeomorfo a $B_\epsilon(\mathbf{a})$. Se, invece, $\mathbf{x} = \{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\} = \pi(\mathbf{a}) = \pi(\mathbf{a}')$ è il punto del toro

proiezione dei punti \mathbf{a}, \mathbf{a}' sulla frontiera di $I \times I$ e diversi dai vertici, esiste $\epsilon > 0$ tale che $A = B_\epsilon(\mathbf{a}) \cap (I \times I)$ e $A' = B_\epsilon(\mathbf{a}') \cap (I \times I)$ siano due semicerchi aperti contenuti in $I \times I$. Allora $V = A \cup A'$ è un aperto saturo di $I \times I$, la proiezione $\pi(V)$ è un aperto del toro contenente \mathbf{x} ed è facile rendersi conto che è omeomorfo ad un intorno circolare aperto di \mathbb{R}^2 (cfr. **Figura 1.22**). Infine, se

$$\mathbf{y} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\} = \pi(0, 0) = \pi(1, 0) = \pi(0, 1) = \pi(1, 1)$$

è il punto del toro proiezione dei quattro vertici di $I \times I$, esiste $\epsilon > 0$ tale che $A_{00} = B_\epsilon(0, 0) \cap (I \times I)$, $A_{10} = B_\epsilon(1, 0) \cap (I \times I)$, $A_{01} = B_\epsilon(0, 1) \cap (I \times I)$ e $A_{11} = B_\epsilon(1, 1) \cap (I \times I)$ siano ciascuno la quarta parte di cerchi aperti contenuti in $I \times I$. Allora $V = A_{00} \cup A_{10} \cup A_{01} \cup A_{11}$ è un aperto saturo di $I \times I$, la proiezione $\pi(V)$ è un aperto del toro contenente \mathbf{y} ed è facile rendersi conto che è omeomorfo ad un intorno circolare aperto di \mathbb{R}^2 (cfr. **Figura 1.22**).

Resta quindi provato che ogni un punto del toro appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2 . \square

ESEMPIO 1.10.24. (La bottiglia di Klein) Sul quadrato $I \times I$ si consideri la relazione d'equivalenza \sim che sulla frontiera di $I \times I$ identifica il punto $(0, y)$ col punto $(1, y)$, il punto $(x, 0)$ col punto $(1 - x, 1)$, per ogni $x, y \in I$, e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a $I \times I$. Lo spazio quoziente $\mathcal{B} = (I \times I) / \sim$ prende il nome di *bottiglia di Klein*. Con ragionamento analogo a quello fatto per il toro si vede che un punto qualsiasi della bottiglia di Klein appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2 . È possibile provare che la bottiglia di Klein non si può immergere in \mathbb{R}^3 senza autointersezioni: nella **Figura 1.23** è mostrata una sua rappresentazione in \mathbb{R}^3 .

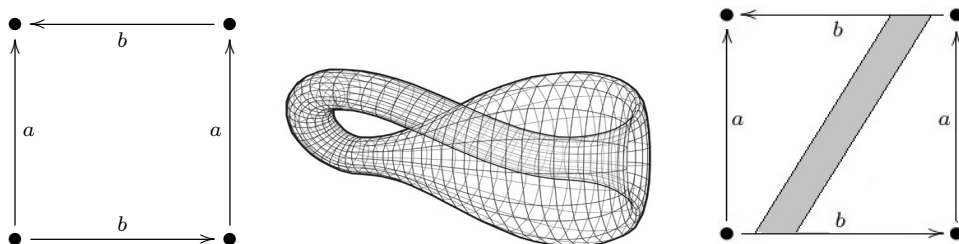


Figura 1.23: La bottiglia di Klein

Siano S_1 e S_2 due segmenti chiusi contenuti rispettivamente nei lati del quadrato $I \times I$ di estremi $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1), (1, 1)$ e non contenenti alcuno di tali estremi. Se S_1 e S_2 hanno la stessa proiezione su \mathcal{B} , il quadrilatero chiuso con vertici gli estremi di S_1 e S_2 ha per proiezione su \mathcal{B} un nastro di Möbius. Così resta provato che la bottiglia di Klein contiene sottospazi omeomorfi al nastro di Möbius. Nella

terza immagine della **Figura 1.23** è evidenziata in grigio una parte del quadrato $I \times I$ la cui proiezione sulla bottiglia di Klein è un nastro di Möbius (**Figura 1.21**). Ragionando come prima sui lati del quadrato $I \times I$ di estremi $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$, $(1, 1)$ si prova che *la bottiglia di Klein contiene sottospazi omeomorfi al cilindro*. \square

ESEMPIO 1.10.25. (Il piano proiettivo (reale)) Sulla superficie sferica S^2 si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di punti diametralmente opposti, cioè: $x \sim y$ se, e solo se, $y = -x$. Lo spazio quoziente $\mathbb{RP}^2 = S^2 / \sim$ prende il nome di **piano proiettivo** (reale).

Sulla semicalotta chiusa di S^2

$$X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$$

si consideri la relazione d'equivalenza \sim_X (indotta su X dalla relazione \sim su S^2) che sulla sua frontiera

$$S^1 = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

identifica il punto $(x, y, 0)$ col punto $(-x, -y, 0)$ e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a X . Per costruzione, **lo spazio quoziente X / \sim_X è omeomorfo a $\mathbb{RP}^2 = S^2 / \sim$** . Osserviamo che la funzione $(x, y, z) \in X \rightarrow (x, y, 0) \in D^2$ è, come subito si verifica, un omeomorfismo che lascia unito ciascun punto di S^1 . Ne segue che, se si quozienta D^2 rispetto alla relazione d'equivalenza \sim che identifica il punto $(x, y, 0)$ col punto $(-x, -y, 0)$ diametralmente opposto e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a D^2 , si ottiene uno spazio omeomorfo a X / \sim_X . Si ha così che

$$\mathbb{RP}^2 = S^2 / \sim \simeq X / \sim_X \simeq D^2 / \sim.$$

D'altra parte è possibile provare che esiste un omeomorfismo tra X e il quadrato $I \times I$ (per esempio, si veda [9], **Paragrafo 5.4, n.9**) che induce l'omeomorfismo descritto nell'**Esempio 1.5.26** tra la circonferenza frontiera di X e i quattro lati che formano la frontiera di $I \times I$. Lo spazio X / \sim_X è, quindi, omeomorfo al quoziente di $I \times I$ rispetto alla relazione d'equivalenza \sim che sulla frontiera di $I \times I$ identifica il punto $(0, y)$ col punto $(1, 1 - y)$, il punto $(x, 0)$ col punto $(1 - x, 1)$, per ogni $x, y \in I$, e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a $I \times I$. Abbiamo così che \mathbb{RP}^2 è **omeomorfo allo spazio quoziente $I \times I / \sim$** (**Figura 1.24**).

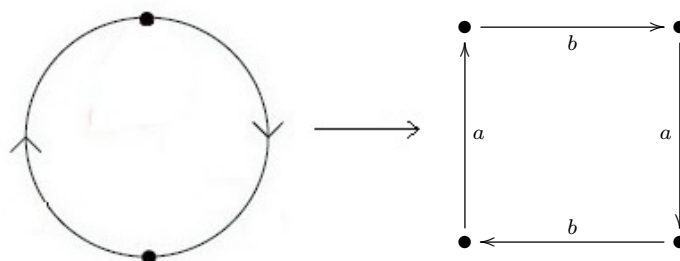


Figura 1.24: Il piano proiettivo reale

Si noti che il piano proiettivo \mathbb{RP}^2 contiene sottospazi omeomorfi al nastro di Möbius. Per esempio nella **Figura 1.25** sono evidenziati in grigio parti del quadrato $I \times I$ le cui proiezioni su \mathbb{RP}^2 sono nastri di Möbius (**Figura 1.21**). Non è difficile rendersi conto che \mathbb{RP}^2 non contiene sottospazi omeomorfi al cilindro. Inoltre, con ragionamento analogo a quello fatto per il toro, si vede che *un punto qualsiasi del piano proiettivo appartiene ad un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2* .

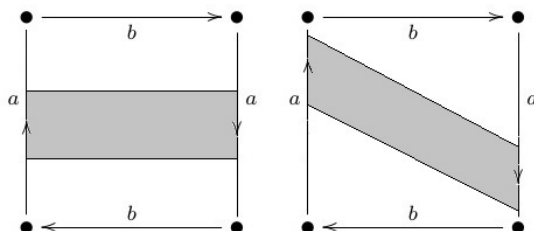


Figura 1.25: Due nastri di Möbius nel piano proiettivo \mathbb{RP}^2

Un altro modo per definire il piano proiettivo è il seguente. In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di vettori proporzionali (appartenenti cioè ad uno stesso sottospazio vettoriale di dimensione uno) e si costruisca lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$. È chiaro che gli elementi di $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$ sono i sottospazi vettoriali di dimensione uno privati del vettore nullo e che questi possono identificarsi con le rette di \mathbb{R}^3 per l'origine. Ora se, per ogni retta l contenente l'origine, denotiamo con $\{x_\ell, -x_\ell\}$ l'insieme dei due punti che la retta l ha in comune con la sfera S^2 , la funzione

$$l \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim \rightarrow \{x_\ell, -x_\ell\} \in \mathbb{RP}^2 = S^2 / \sim$$

risulta un omeomorfismo tra lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$ e il piano proiettivo \mathbb{RP}^2 .

Con riferimento all'ultimo modello di \mathbb{RP}^2 , se V_1, V_2 sono sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 rispettivamente di dimensione 1, 2, le immagini di $V_1 \setminus \{0\}$ e $V_2 \setminus \{0\}$ mediante la proiezione canonica $p : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ prendono rispettivamente il

nome di **punto** e **retta**. Osserviamo esplicitamente che un punto è esattamente un elemento di \mathbb{RP}^2 . I punti e le rette di \mathbb{RP}^2 verificano le seguenti proprietà:

- due punti distinti di \mathbb{RP}^2 appartengono ad un'unica retta;
- due rette distinte di \mathbb{RP}^2 hanno esattamente un punto in comune.

È possibile provare che *il piano proiettivo non si può immergere in \mathbb{R}^3 senza autointersezioni*: nella **Figura 1.26** sono mostrate due sue rappresentazioni in \mathbb{R}^3 . \square

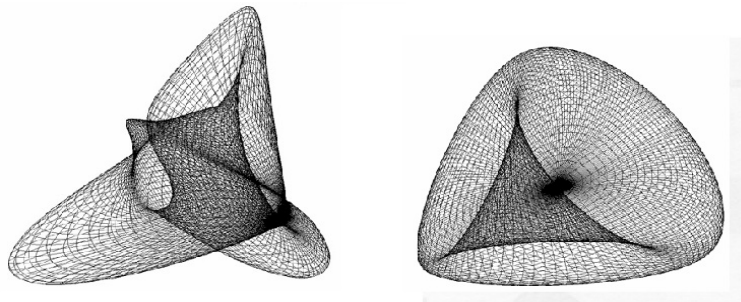


Figura 1.26: Due rappresentazioni del piano proiettivo reale in \mathbb{R}^3

ESEMPIO 1.10.26. (Gli spazi proiettivi (reali)) Sulla superficie sferica S^n si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di punti diametralmente opposti. Lo spazio quoziente $\mathbb{RP}^n = S^n / \sim$ prende il nome di **spazio proiettivo** (reale) di dimensione n . È chiaro che nel caso $n = 2$ si ottiene esattamente il piano proiettivo definito nell'esempio precedente. Nel caso $n = 1$ lo spazio \mathbb{RP}^1 si chiama **retta proiettiva** (reale).

Anche per gli spazi proiettivi possiamo mostrare un secondo modello. In $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ si consideri la relazione d'equivalenza \sim che identifica le coppie di vettori proporzionali (appartenenti cioè ad uno stesso sottospazio vettoriale di dimensione uno) e si costruisca lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. È chiaro che gli elementi di $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ sono i sottospazi vettoriali di dimensione uno privati del vettore nullo e che questi possono identificarsi con le rette di \mathbb{R}^{n+1} per l'origine. Ora se, per ogni retta ℓ contenente l'origine, denotiamo con $\{\mathbf{x}_\ell, -\mathbf{x}_\ell\}$ l'insieme dei due punti che la retta ℓ ha in comune con la sfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, la funzione

$$\ell \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \rightarrow \{\mathbf{x}_\ell, -\mathbf{x}_\ell\} \in \mathbb{RP}^n = S^n / \sim$$

risulta un omeomorfismo tra lo spazio quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ e lo spazio proiettivo \mathbb{RP}^n .

Con riferimento all'ultimo modello di $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$, se V_{m+1} è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione $m + 1$, l'immagine S_m di $V_{m+1} \setminus \{0\}$ mediante la proiezione canonica $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ prende il nome di **sottospazio proiettivo di dimensione m** . I sottospazi proiettivi di dimensioni $0, 1, 2, n - 1$ si chiamano rispettivamente **punti, rette, piani, iperpiani**. Riportiamo di seguito alcune proprietà di $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$:

- due punti distinti di $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ appartengono ad un'unica retta;
- un sottospazio proiettivo di dimensione $m < n$ e un punto di $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ che non si appartengono sono contenuti in un unico sottospazio proiettivo di dimensione $m + 1$;
- un iperpiano e un sottospazio proiettivo m -dimensionale che non si appartengono di $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ s'intersecano in un sottospazio proiettivo di dimensione $m - 2$;
- ogni sottospazio proiettivo di dimensione m di $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}\mathbb{R}^m$. □

OSSERVAZIONE 1.10.27. Nello spazio quoziente ottenuto da un quadrato identificando una o due coppie di lati opposti, si definisce **bordo** l'insieme dei punti per cui non esiste un intorno aperto omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2 . Ciò premesso, sintetizzando alcune osservazioni degli esempi precedenti, abbiamo che:

- il cilindro ha bordo non vuoto e sconnesso;
- il nastro di Möbius ha bordo non vuoto e connesso;
- il toro ha bordo vuoto, contiene sottospazi omeomorfi al cilindro e non contiene sottospazi omeomorfi al nastro di Möbius;
- la bottiglia di Klein ha bordo vuoto, contiene sottospazi omeomorfi al cilindro e sottospazi omeomorfi al nastro di Möbius;
- il piano proiettivo ha bordo vuoto, non contiene sottospazi omeomorfi al cilindro e contiene sottospazi omeomorfi al nastro di Möbius.

Ne segue che **il cilindro, il nastro di Möbius, il toro, la bottiglia di Klein e il piano proiettivo sono spazi topologici a due a due non omeomorfi**. □

ESERCIZIO 1.10.28. ($\mathbb{P}\mathbb{R}^1$ e S^1 sono omeomorfi) Provare che la retta proiettiva reale e una circonferenza sono spazi omeomorfi. □

1.11 Superfici topologiche

La superficie sferica S^2 , con la topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^3 , non è omeomorfa a \mathbb{R}^2 : S^2 è uno spazio compatto a differenza di \mathbb{R}^2 . Nonostante ciò S^2

si può ricoprire con aperti ciascuno dei quali è omeomorfo a \mathbb{R}^2 : basta prendere, per esempio, i complementari di due suoi punti distinti. La stessa proprietà è verificata anche dal *toro*, dalla *bottiglia di Klein* e dal *piano proiettivo reale*, come già osservato negli **Esempi 1.10.23, 1.10.24, 1.10.25**. In modo del tutto informale possiamo dire che se ci limitiamo ad osservare questi spazi nelle “vicinanze” di un punto li percepiamo “*piatti*” e “*somiglianti*” al piano euclideo, mentre, visti nella loro globalità, possono avere le forme le più svariate. Gli spazi topologici, che come gli esempi precedenti hanno la proprietà di essere “*localmente*” omeomorfi a \mathbb{R}^2 , prendono il nome di *superfici topologiche*.

Il presente paragrafo è una breve introduzione allo studio delle superfici topologiche. Purtroppo non avremo la possibilità di trattare l’argomento in modo approfondito e spesso saremo costretti ad omettere le dimostrazioni di importanti risultati o a presentarle in modo euristico e non rigoroso, affidandoci molto all’intuizione. Per esposizioni più precise e approfondite si rimanda alla bibliografia riportata alla fine di questi appunti, in particolare a [1].

DEFINIZIONE 1.11.1. Uno spazio topologico Σ si dice *superficie topologica* (senza bordo) se è connesso¹, di Hausdorff, a base numerabile e tale che, per ogni punto $a \in \Sigma$, esiste un intorno aperto di a omeomorfo ad un cerchio aperto di \mathbb{R}^2 (e quindi a \mathbb{R}^2). \square

ESERCIZIO 1.11.2. Provare che ogni punto di una superficie topologica appartiene ad un intorno chiuso omeomorfo a D^2 (cerchio chiuso di \mathbb{R}^2). \square

ESEMPI 1.11.3. \mathbb{R}^2 e tutti i suoi *sottospazi aperti e connessi* sono chiaramente esempi di superfici topologiche. Altri esempi di superfici topologiche sono: la *superficie sferica* S^2 , il *toro*, la *bottiglia di Klein*, il *piano proiettivo reale* (cfr. **Esempi 1.10.23, 1.10.24, 1.10.25**), le *superfici algebriche connesse di* \mathbb{R}^3 , le *frontiere dei poliedri convessi*.

I sottospazi non aperti di \mathbb{R}^2 **non** sono superfici topologiche. \square

1.11.1 Quozienti di poligoni etichettati

In \mathbb{R}^2 consideriamo un poligono compatto e convesso² P_{2n} con $2n$ lati ($n > 1$) e, fissato un verso di percorrenza ω^+ della frontiera ∂P_{2n} , ordiniamo linearmente

¹L’ipotesi di connessione è soltanto un’ipotesi di comodo. Se nella definizione non si fa l’ipotesi della connessione lo studio di una superficie si ridurrà a quello delle sue componenti connesse.

²Per poligono compatto e convesso P intendiamo la regione limitata del piano \mathbb{R}^2 individuata dai lati di P , compresi i lati stessi. Chiaramente i lati di P costituiscono la frontiera ∂P del poligono.

l'insieme dei suoi lati $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n}$ in modo coerente col verso di percorrenza ω^+ . Un lato di P_{2n} su cui si sia fissato un orientamento si chiama *lato orientato*. Una funzione che ad ogni lato di P_{2n} associa uno dei suoi due orientamenti si chiama *orientazione dei lati di P_{2n}* e la coppia formata da P_{2n} e una sua orientazione dei lati si dice **poligono a lati orientati**.

Consideriamo ora le parole su n lettere a_1, a_2, \dots, a_n del tipo

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} a_{j_2}^{\epsilon_{j_2}} \cdots a_{j_{2n}}^{\epsilon_{j_{2n}}}, \quad (1.41)$$

dove ogni lettera a_j compare esattamente due volte e $\epsilon_{j_s} = \pm 1$; nel seguito scriveremo a_j invece di a_j^{+1} . Ogni parola di questo tipo si chiama **etichettatura** di P_{2n} e determina l'orientazione dei lati di P_{2n} che assegna a ciascun lato ℓ_j l'orientamento concorde o discorde con ω^+ a seconda che l'esponente di a_j sia $+1$ o -1 .

La coppia formata da P_{2n} e una sua etichettatura si dice **poligono etichettato**.

A questo punto, fissata un'etichettatura di P_{2n} , ad ogni lato ℓ è associata la stessa lettera di un solo altro lato ℓ' ed esiste un unico omeomorfismo lineare $\varphi_{\ell, \ell'}$ tra questi due lati che rispetta le orientazioni ad essi associate dall'etichettatura (cfr.

Osservazione 1.5.20). Possiamo allora considerare in P_{2n} la relazione d'equivalenza \sim che sulla frontiera ∂P_{2n} identifica le coppie di punti corrispondenti in un omeomorfismo del tipo $\varphi_{\ell, \ell'}$ e lascia equivalente solo a se stesso ogni punto interno a P_{2n} . Lo spazio quoziente P_{2n}/\sim di P_{2n} rispetto alla relazione d'equivalenza determinata da un'etichettatura di P_{2n} è connesso e compatto, perchè tale è P_{2n} . Esso, inoltre, è una *superficie topologica*, come subito si prova con considerazioni analoghe a quelle fatte per il toro nella parte finale dell'**Esempio 1.10.23**. Tale superficie si dice **associata** al poligono etichettato, o all'etichettatura, in considerazione. Due vertici di P_{2n} si dicono **equivalenti** se sono tali rispetto alla relazione \sim prima definita. Chiaramente, una classe completa di vertici equivalenti corrisponde ad un punto della superficie associata a P_{2n} .

A volte, con abuso di notazione, la superficie associata ad un poligono etichettato si denota con la stessa parola che indica l'etichettatura del poligono.

OSSERVAZIONE 1.11.4. Fissato un verso di percorrenza ω^+ della frontiera ∂P_{2n} di un poligono regolare P_{2n} a lati orientati, un'etichettatura corrispondente allo spazio quoziente, ottenuto da P_{2n} identificando a coppie i suoi lati, si ottiene nel seguente modo:

1. si sceglie arbitrariamente un vertice e si assegna una stessa lettera ai lati che devono identificarsi;
2. partendo dal vertice scelto e seguendo il verso di percorrenza ω^+ , si etichettano i lati, nell'ordine in cui si incontrano,
 - con la lettera assegnata se l'orientazione indicata su di essi è concorde con ω^+ ,

- con la lettera assegnata ad esponente -1 se l'orientazione indicata su di essi è non concorde con ω^+ . \square

ESEMPIO 1.11.5. (Quozienti di quadrati etichettati) Con riferimento a due lettere a, b e al verso di percorrenza orario dei lati di un quadrato, le etichettature

$$aba^{-1}b^{-1}, ab^{-1}a^{-1}b^{-1}, abab$$

determinano rispettivamente il *toro*, la *bottiglia di Klein* e il *piano proiettivo reale* (cfr. **Paragrafo 1.10.1** e **Figura 1.27**). Si noti che i quadrati etichettati della **Figura 1.27** hanno i quattro vertici tra loro equivalenti. \square

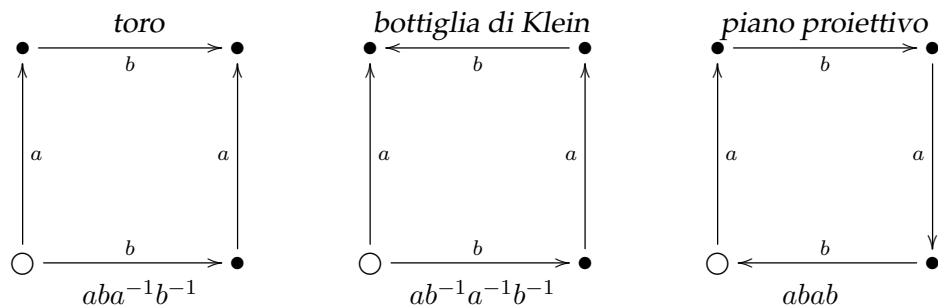


Figura 1.27: Quozienti di quadrati etichettati

ESEMPIO 1.11.6. (Quozienti di digoni etichettati) Due punti antipodali di una circonferenza suddividono la circonferenza stessa in due semicirconferenze. Ciò suggerisce di considerare D^2 come un poligono "generalizzato" P_2 con due lati (*digono*) e, in analogia con quanto fatto per un poligono P_{2n} , permette di considerare la superficie associata ad una sua etichettatura. Le superfici associate alle etichettature aa^{-1} e aa di P_2 corrispondono rispettivamente alla superficie sferica S^2 e al piano proiettivo \mathbb{RP}^2 (cfr. **Figura 1.28**). Si osservi che, anche in questo caso, i vertici dei digoni sono equivalenti rispetto alle due etichettature considerate. \square

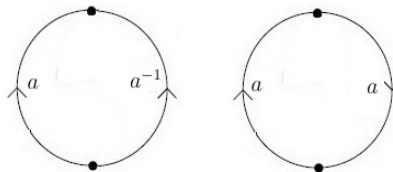


Figura 1.28: La superficie sferica S^2 e il piano proiettivo reale \mathbb{RP}^2

Da notare che *etichettature distinte di un medesimo poligono possono dar luogo ad una stessa superficie*; per esempio, $abab$ e $a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$ sono etichettature diverse del quadrato che danno luogo al piano proiettivo.

DEFINIZIONE 1.11.7. Due poligoni etichettati, o due etichettature di un poligono, si dicono **equivalenti** se le corrispondenti superfici associate sono omeomorfe. \square

Nel seguito, col termine “*superficie*” intenderemo sempre “*superficie topologica*”.

OSSERVAZIONE 1.11.8. Se un poligono etichettato possiede due lati corrispondenti con lo stesso esponente, allora la superficie associata contiene sottospazi chiusi omeomorfi al nastro di Möbius. Per rendersene conto basta ragionare come nell’**Esempio 1.10.24**. Analogamente, se il poligono possiede due lati corrispondenti con esponenti diversi, allora la superficie associata contiene sottospazi chiusi omeomorfi al cilindro. \square

DEFINIZIONE 1.11.9. Sia g un intero positivo.

La superficie associata ad un poligono P_{4g} con etichettatura

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1} \quad (1.42)$$

prende il nome di **multitoro di genere g** , o g -**toro**, e si denota con T_g . La superficie sferica S^2 si considera come un **multitoro di genere 0** e, per tale motivo, la si denota anche con T_0 .

La superficie associata ad un poligono P_{4g} con etichettatura

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_{2g} a_{2g} \quad (1.43)$$

prende il nome di **multipiano proiettivo di genere g** , o g -**piano proiettivo**, e si denota con U_g . \square

OSSERVAZIONE 1.11.10. I vertici di un poligono con etichettatura del tipo (1.42) o (1.43) sono tra loro equivalenti. \square

1.11.2 Somma connessa di superfici

Introduciamo una costruzione che, a partire da due superfici, permette di ottenerne una terza mediante operazioni dette di “*taglia*” e “*incolla*”. In modo non formale l’operazione può descriversi nel seguente modo: si “*taglia*” da ciascuna delle due superfici assegnate un aperto omeomorfo ad un cerchio aperto B^2 di \mathbb{R}^2 e si “*incollano*” gli spazi così ottenuti lungo le frontiere dei due aperti eliminati.

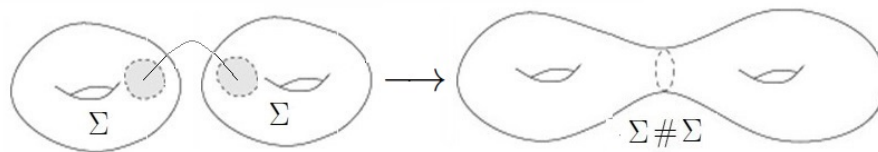


Figura 1.29: Somma connessa di due tori

DEFINIZIONE 1.11.11. (Somma connessa) Siano Σ_1, Σ_2 due superfici disgiunte, U_1, U_2 due aperti omeomorfi a B^2 rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 e

$$h : \partial U_1 \rightarrow \partial U_2$$

un omeomorfismo tra le frontiere di U_1 e U_2 , che risultano omeomorfe alla circonferenza S^1 (cfr. **Esercizio 1.11.2**). Consideriamo lo spazio somma (cfr. **Esempio 1.3.12**)

$$X = (\Sigma_1 \setminus U_1) \sqcup (\Sigma_2 \setminus U_2)$$

e la relazione d'equivalenza \sim su X che identifica le coppie di punti in $\partial U_1 \cup \partial U_2$ che si corrispondono in h e lascia equivalente solo a se stesso ogni altro punto. Lo spazio quoziente X/\sim , come subito si prova, risulta una superficie che si dice **somma connessa** di Σ_1 e Σ_2 e si denota con $\Sigma_1 \# \Sigma_2$. \square

Se $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono superfici, è possibile provare che:

- la somma connessa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$, a meno di omeomorfismi, non dipende dagli aperti U_1, U_2 scelti rispettivamente in Σ_1 e Σ_2 ;
- la somma connessa di Σ_1 e di una superficie sferica S^2 è omeomorfa a Σ_1 ;
- $\Sigma_1 \# \Sigma_2 \simeq \Sigma_2 \# \Sigma_1$;
- $(\Sigma_1 \# \Sigma_2) \# \Sigma_3 \simeq \Sigma_1 \# (\Sigma_2 \# \Sigma_3)$.

Dall'ultima relazione segue che, per induzione, è ben definita **la somma connessa**

$$\Sigma_1 \# \Sigma_2 \# \cdots \# \Sigma_k$$

di $k (> 2)$ superfici $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$.

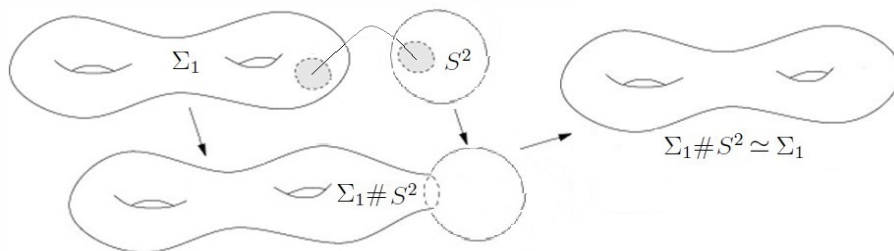


Figura 1.30: $\Sigma_1 \# S^2 \simeq \Sigma_1$

ESEMPIO 1.11.12. La somma connessa di due tori è omeomorfa al quoziente dell'ottagono etichettato $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ (cfr. prima riga della **Figura 1.31**), cioè è un 2-toro T_2 . La somma connessa di due piani proiettivi U_2 è omeomorfa al quoziente del quadrato etichettato $aabb$, cioè è un 2-piano proiettivo U_2 (cfr. seconda riga della **Figura 1.31**). \square

ESERCIZIO 1.11.13. Generalizzare l'esempio precedente provando per induzione su g che la somma connessa di g tori T_g è omeomorfa al quoziente di un poligono P_{4g} con etichettatura $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$ e che la somma connessa di g piani proiettivi U_g è omeomorfa al quoziente di un poligono P_{4g} con etichettatura $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_{2g} a_{2g}$. \square

La proposizione che segue è di immediata dimostrazione.

PROPOSIZIONE 1.11.14. *La somma connessa di due superfici compatte è una superficie compatta.* \square

In generale, per la somma connessa di superfici associate a poligoni etichettati si può provare il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.11.15. *Siano Σ_1, Σ_2 le superfici associate alle etichettature*

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} a_{j_2}^{\epsilon_{j_2}} \cdots a_{j_{2n}}^{\epsilon_{j_{2n}}} \text{ e } b_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} b_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots b_{i_{2m}}^{\epsilon_{i_{2m}}}$$

dei poligoni P_{2n}, P_{2m} con $2n$ e $2m$ lati, rispettivamente. Allora la somma connessa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ è la superficie associata all'etichettatura

$$a_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} a_{j_2}^{\epsilon_{j_2}} \cdots a_{j_{2n}}^{\epsilon_{j_{2n}}} b_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} b_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots b_{i_{2m}}^{\epsilon_{i_{2m}}}$$

di un poligono $P_{2(n+m)}$ con $2(n+m)$ lati. \square

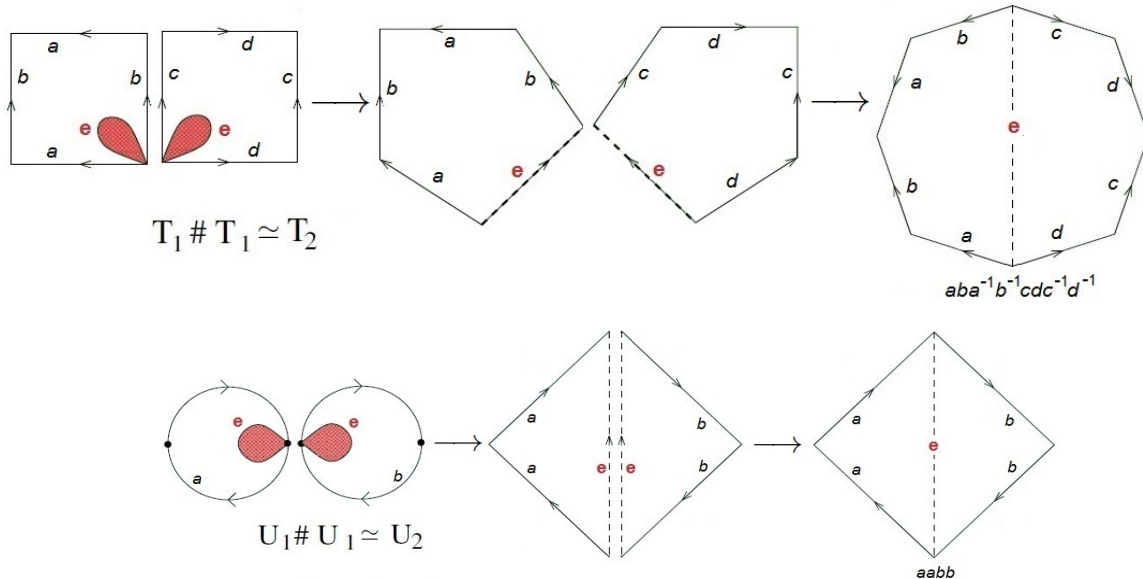


Figura 1.31: $T_2 \simeq aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ e $U_2 \simeq aabb$

PROPOSIZIONE 1.11.16. Sia P_{2n} un poligono etichettato del tipo descritto in **Figura 1.11.2-1** e, con riferimento alle **Figure 1.11.2-2,3**, consideriamo i due poligoni P', P'' ottenuti tagliando P_{2n} lungo il segmento b che unisce i vertici E, F . Allora P_{2n} è omeomorfo al poligono etichettato che si ottiene identificando i lati orientati etichettati con a in P e P' (si veda **Figura 1.11.2-4,5**). \square

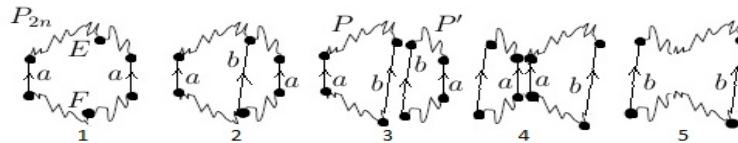


Figura 1.32: **Proposizione 1.11.16**

ESEMPIO 1.11.17. La somma connessa U_2 di due piani proiettivi è omeomorfa alla bottiglia di Klein (cfr. **Figura 1.33**). \square

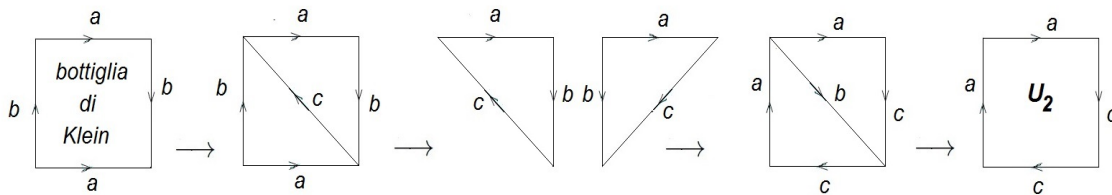


Figura 1.33: (bottiglia di Klein) $\simeq U_2$

ESEMPIO 1.11.18. La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa al quoziente dell'esagono etichettato $ccbab^{-1}a^{-1}$ (cfr. **Figura 1.34**). \square

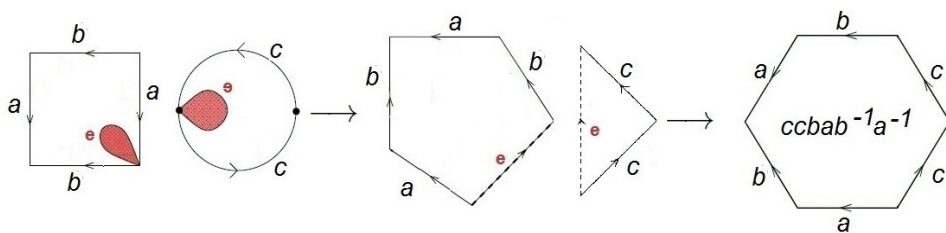


Figura 1.34: $T_1 \# U_1$ e (bottiglia di Klein) $\# U_1$

ESEMPIO 1.11.19. La somma connessa della bottiglia di Klein e di un piano proiettivo è omeomorfa al quoziente dell'esagono etichettato $ccb^{-1}ab^{-1}a^{-1}$ (cfr. **Figura 1.35**),

ESEMPIO 1.11.20. ($T_1 \# U_1 \simeq U_3$) La **somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi**: $T_1 \# U_1 \simeq U_3$. Per provare questa proprietà, tenendo conto dell'esempio precedente, basta far vedere che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo e la

somma connessa della bottiglia di Klein e di un piano proiettivo sono entrambe omeomorfe al quoziente dell'esagono etichettato $cacbab^{-1}$ (cfr. Figura 1.36). \square

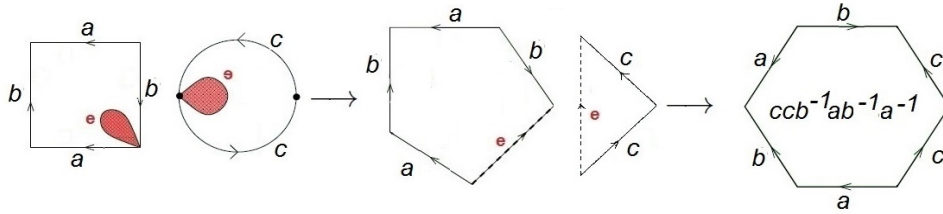


Figura 1.35: $T_1 \# U_1$ e (bottiglia di Klein) $\# U_1$

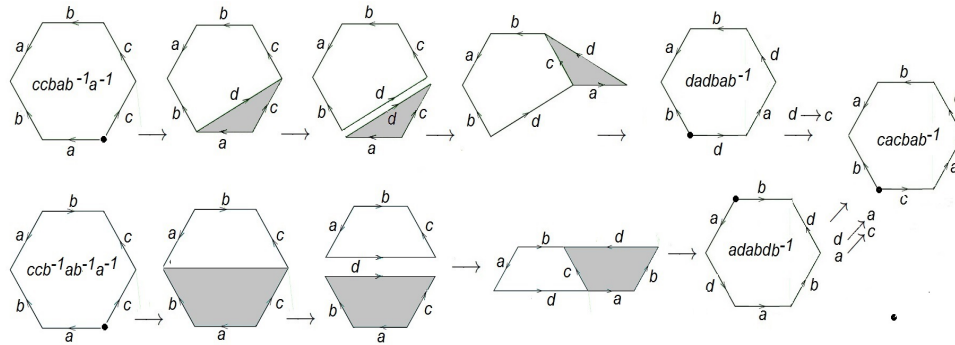


Figura 1.36: $T_1 \# U_1 \simeq U_3$

L'esempio precedente si generalizza nel seguente modo.

PROPOSIZIONE 1.11.21. ($T_g \# U_h \simeq U_{2g+h}$) *La somma connessa di un g -toro e di un h -piano proiettivo è omeomorfa ad un $(2g + h)$ -piano proiettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'asserto per induzione su g . In forza dell'esempio precedente, l'asserto è vero per $g = 1$:

$$T_1 \# U_h \simeq (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \simeq U_3 \# U_{h-1} \simeq U_{h+2}.$$

Ora, se assumiamo l'asserto vero per $g' < g$, abbiamo:

$$T_g \# U_h \simeq T_{g-1} \# (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \simeq T_{g-1} \# U_3 \# U_{h-1} \simeq T_{g-1} \# U_{h+2} \simeq U_{2g+h},$$

come volevamo dimostrare. \square

Per i quozienti dei poligoni etichettati vale il seguente fondamentale risultato.

PROPOSIZIONE 1.11.22. *Ogni superficie associata ad un poligono etichettato è omeomorfa ad una sfera S^2 , o a un multitoro, o al piano proiettivo reale, o a un multipiano proiettivo.* \square

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che un poligono etichettato con due soli lati è del tipo aa^{-1} oppure aa e corrisponde ad una sfera S^2 o ad un piano proiettivo, rispettivamente. Sia dunque Σ la superficie associata ad un poligono etichettato P_{2n} con $2n$ lati, $n > 1$. Una coppia di lati etichettati con la stessa lettera può avere i lati orientati in modo discorde o in modo concorde: nel primo caso diremo che la coppia è **di primo tipo**, nell'altro caso **di secondo tipo**. Ciò premesso, proveremo l'asserto con una procedura che ci permetterà di costruire un poligono etichettato equivalente a P_{2n} e del tipo desiderato.

Passo (a): *Eliminazione delle coppie di lati adiacenti del primo tipo in P_{2n} .*

Due lati adiacenti che formano una coppia del primo tipo possono essere identificati, e quindi eliminati, come mostrato nella **Figura 1.37**. In tal modo P_{2n} si riduce ad un poligono equivalente P_{2n-2} con $2n-2$ lati. Continuando ripetutamente con questa riduzione, finché possibile, otteniamo un poligono etichettato P^a equivalente a P_{2n} e privo di coppie di lati adiacenti di primo tipo. Se P^a ha esattamente due lati, come già osservato, P^a corrisponde alla sfera S^2 o al piano proiettivo e la procedura termina qui. Nel caso contrario, cioè se P^a ha almeno quattro lati, andiamo al passo successivo.



Figura 1.37: Eliminazione di una coppia di lati adiacenti di primo tipo.

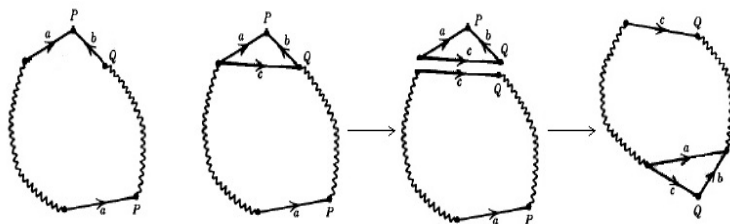


Figura 1.38: Riduzione ad un'unica classe d'equivalenza di vertici.

Passo (b): *Identificazione di tutti i vertici di P^a .*

Se il poligono etichettato P^a ha tutti i vertici equivalenti, andiamo al passo successivo (c). Se P^a possiede vertici non equivalenti, possiamo scegliere due vertici consecutivi non equivalenti P e Q come mostrato nel primo grafico della **Figura 1.38**. Allora, con riferimento agli altri tre grafici della stessa figura, tagliamo P^a lungo il segmento c che unisce Q al primo vertice del lato a e, nei due poligoni ottenuti, identifichiamo i lati etichettati con a . In questo modo otteniamo un

poligono equivalente a P^a con un vertice in meno nella classe di equivalenza di P e uno in più nella classe di equivalenza di Q . Allora, continuando con questa procedura - alternandola, se necessario, col **Passo (a)** - otteniamo un poligono etichettato P^b equivalente a P^a , senza coppie di lati adiacenti di primo tipo e con una sola classe d'equivalenza dei vertici.

Passo (c): *Rendere adiacenti i lati delle coppie di secondo tipo in P^b .*

Supponiamo che P^b possieda una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti. Allora, con riferimento alla **Figura 1.39**, tagliamo P^b lungo il segmento a e identifichiamo i lati etichettati con b . In questo modo otteniamo un poligono equivalente a P^b nel quale una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti è stata sostituita con una coppia di lati del secondo tipo adiacenti. Allora, continuando con la stessa procedura, si arriva ad un poligono etichettato P^c equivalente a P^b , con una sola classe d'equivalenza dei vertici e privo di coppie di lati non adiacenti di secondo tipo.

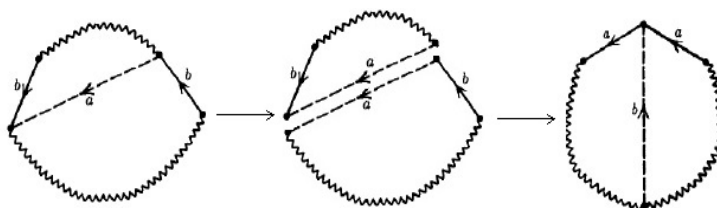


Figura 1.39: Rendere adiacenti i lati delle coppie di primo tipo.

Ora, se P^c non contiene coppie di lati di primo tipo, la dimostrazione è conclusa in quanto P^c risulta del tipo $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$ e Σ è un multipiano proiettivo. Nel caso contrario andiamo al **Passo (d)**.

Passo (d): *Raggruppare le coppie di lati di primo tipo in P^c .*

Osserviamo che il poligono P^c non può presentarsi con coppie di lati di primo tipo come nel primo grafico della **Figura 1.40**, ove nessun vertice della poligonale A può identificarsi con un vertice della poligonale B : se ciò accadesse i vertici iniziali e finali di c non potrebbero identificarsi e P^c conterrebbe più di una classe d'equivalenza di vertici.

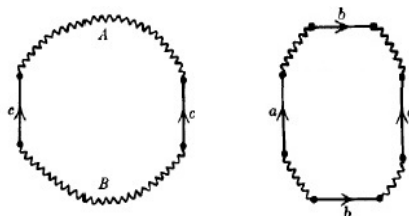


Figura 1.40:

Ne segue che in P^c ogni coppia di lati di primo tipo (a, a^{-1}) è separata da un'altra coppia di lati dello stesso tipo (b, b^{-1}) ; cioè i lati etichettati con a e b devono presentarsi in una posizione del tipo $a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$, come mostrato nel secondo grafico della **Figura 1.40**. Consideriamo dunque i lati di due coppie $(a, a^{-1}), (b, b^{-1})$ del primo tipo in P^c disposti come nel secondo grafico della **Figura 1.40** e rendiamo questi lati consecutivi mediante le operazioni di taglia e incolla descritte nella **Figura 1.41**. Iteriamo poi il procedimento fino a quando non otteniamo un poligono P^d equivalente a P^c nel quale le coppie del primo tipo figurano tutte in gruppi adiacenti di quattro del tipo $aba^{-1}b^{-1}$.

In conclusione, il poligono P^d o è del tipo

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

oppure del tipo

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} c_1 c_1 c_2 c_2 \cdots c_m c_m.$$

Allora, nel primo caso P^d è un n -toro; nel secondo caso invece, in forza della **Proposizione 1.11.21**, è un $(m + 2n)$ -piano proiettivo. Il nostro asserto è così completamente provato. \square

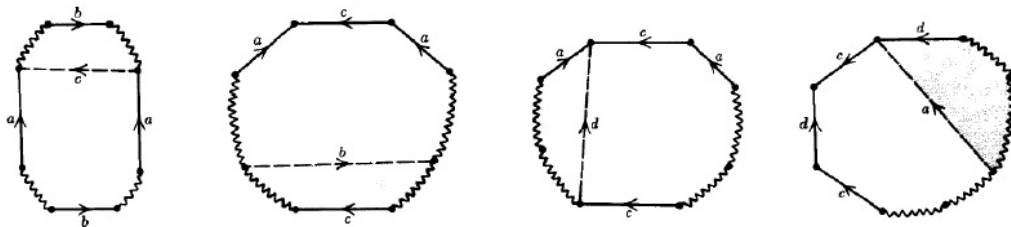


Figura 1.41:

DEFINIZIONE 1.11.23. (Triangoli) Un **triangolo** di una superficie Σ è una terna (T, T', f) ove

- T è un sottospazio chiuso di Σ ;
- T' è un triangolo chiuso del piano euclideo \mathbb{R}^2 ;
- $f : T' \rightarrow T$ è un omeomorfismo.

Nel seguito, se non vi è luogo ad equivoci, sottointendendo T' e f , denoteremo semplicemente con T il triangolo (T, T', f) . Le immagini in f dei lati e dei vertici di T' si dicono rispettivamente **lati** e **vertici** di T . \square

DEFINIZIONE 1.11.24. (Triangolazioni) Una **triangolazione** di una superficie Σ è un insieme finito $\mathbf{T} = \{(T_j, T'_j, f_j) : j = 1, 2, \dots, n\}$ di triangoli di Σ tale che l'insieme $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ è un ricoprimento di Σ e due triangoli distinti e non

disgiunti T_i e T_j s'intersecano esattamente o in un vertice o in un lato. I vertici e i lati dei triangoli e i triangoli di una triangolazione si dicono rispettivamente **vertici**, **lati** o **spigoli** e **facce** della triangolazione. Una superficie che ammette una triangolazione si dice **triangolabile**. \square

ESEMPIO 1.11.25. (Triangolazioni della sfera) In \mathbb{R}^3 si considerino un tetraedro regolare e la sfera ad esso circoscritta. Proiettando il tetraedro sulla sfera dal suo centro si ottiene una triangolazione della sfera con 4 vertici, 6 spigoli e 4 facce. Un'altra triangolazione della sfera è mostrata nella **Figura 1.42**. Questa triangolazione ha 5 vertici, 9 spigoli e 6 facce. \square

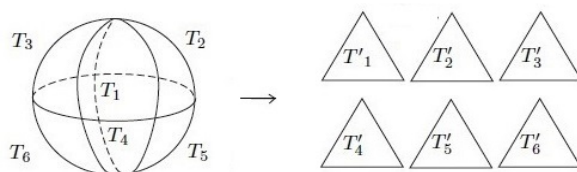


Figura 1.42: Una triangolazione della sfera S^2

OSSERVAZIONE 1.11.26. È facile rendersi conto che per una triangolazione $\mathbf{T} = \{(T_j, T'_j, f_j) : j = 1, 2, \dots, n\}$ di una superficie compatta valgono le seguenti proprietà:

- ogni lato di \mathbf{T} è lato di esattamente due triangoli;
- i triangoli di \mathbf{T} contenenti un fissato vertice v possono essere ordinati circolarmente in modo che due di essi siano consecutivi se, e solo se, s'intersecano in un lato. \square

Un primo risultato, che riportiamo senza dimostrazione, fondamentale per la classificazione delle superfici compatte è il seguente.

PROPOSIZIONE 1.11.27. (Teorema di T.Radò) *Ogni superficie compatta è triangolabile.* \square

PROPOSIZIONE 1.11.28. *Ogni superficie compatta Σ è omeomorfa alla superficie associata ad un opportuno poligono etichettato. Ne segue che:*

- se Σ non contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (superficie orientabile), è omeomorfa ad una sfera S^2 o ad un g -toro, $g > 0$;
- se Σ contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (superficie non orientabile), è omeomorfa al piano proiettivo (reale) o ad un g -piano proiettivo, $g > 1$. \square

DIMOSTRAZIONE. In forza della **Proposizione 1.11.27** esiste una triangolazione \mathbf{T} di Σ e senza perdita di generalità possiamo assumere che, per ogni due triangoli distinti $(T_i, T'_i, f_i), (T_j, T'_j, f_j)$ di \mathbf{T} , T'_i e T'_j sono disgiunti. L'**Osservazione 1.11.26** garantisce che possiamo numerare i triangoli di \mathbf{T} nel seguente modo:

- denotiamo con $\{(T_1, T'_1, f_1)$ un qualsiasi triangolo di \mathbf{T} ;
- denotiamo con $\{(T_2, T'_2, f_2)$ uno dei triangoli (T, T', f) di \mathbf{T} per cui T ha un lato in comune con T_1 ;
- denotiamo con $\{(T_3, T'_3, f_3)$ uno dei triangoli (T, T', f) di \mathbf{T} per cui T ha un lato in comune con uno dei precedenti T_1, T_2 ;
- continuiamo con questa regola finché non restano numerati tutti i lati di \mathbf{T} ³.

Chiaramente i triangoli T_1, T_2, \dots, T_n sono tali che ogni T_j ha uno spigolo in comune con uno dei triangoli precedenti T_1, T_2, \dots, T_{j-1} . Ora, posto

$$T' = \bigcup_{j=1}^n T'_j,$$

eseguiamo in successione le seguenti $n - 1$ operazioni:

Passo (1): Siano ℓ_2 un lato comune a T_2 e ℓ'_1, ℓ'_2 i lati rispettivamente di T'_1, T'_2 per cui $f_1(\ell'_1) = f_2(\ell'_2) = \ell_2$. Incolliamo T'_1 e T'_2 identificando i lati ℓ'_1 e ℓ'_2 mediante l'omeomorfismo $f_2^{-1} \circ f_1$. Denotiamo con T_{12} il quadrato così ottenuto.

Passo (2): Siano ℓ_3 un lato comune a T_3 e ad un triangolo T_i tra T_1, T_2 . Siano ℓ'_3, ℓ'_i i lati rispettivamente di T'_3, T'_i per cui $f_3(\ell'_3) = f_i(\ell'_i) = \ell_3$. Incolliamo T'_3 e T_{12} identificando i lati ℓ'_3 e ℓ'_i mediante l'omeomorfismo $f_i^{-1} \circ f_3$. Denotiamo con T_{123} il poligono così ottenuto.

...

Passo (n-1): Siano ℓ_n un lato comune a T_n e ad un triangolo T_i tra T_1, T_2, \dots, T_{n-1} . Siano ℓ'_n, ℓ'_i i lati rispettivamente di T'_n, T'_i per cui $f_n(\ell'_n) = f_i(\ell'_i) = \ell_n$. Incolliamo T'_n e T_1, T_2, \dots, T_{n-1} identificando i lati ℓ'_n e ℓ'_i mediante l'omeomorfismo $f_i^{-1} \circ f_n$. Denotiamo con P il poligono così ottenuto.

Un lato ℓ' del poligono P è anche un lato di un triangolo T'_i ; quindi $\ell = f_i(\ell')$ è un lato del triangolo $T_i \in \mathbf{T}$ ed esiste un altro triangolo $T_j \in \mathbf{T}$ con $T_i \cap T_j = \ell$. Allora $\ell'' = f_j^{-1}(\ell)$ è un lato di P diverso da ℓ' e resta provato che i lati di P si dispongono a coppie e, quindi, P ha un numero pari di lati. Ora possiamo

³ Osserviamo esplicitamente che la procedura descritta deve necessariamente terminare con la numerazione di tutti gli n triangoli di \mathbf{T} . Infatti, se così non fosse e la procedura terminasse solo dopo k passi, con $k < n$, allora l'unione C dei triangoli $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ e l'unione C' dei triangoli rimanenti, non avendo in comune né un vertice né un lato, sarebbero due chiusi disgiunti con $C \cup C' = \Sigma$; un assurdo perché Σ è uno spazio connesso.

identificare i lati ℓ' e ℓ'' mediante l'omeomorfismo $f_j^{-1} \circ f_i$ e possiamo continuare così con tutte le coppie di lati corrispondenti. In questo modo otteniamo una superficie identificando a coppie i lati di P e tale superficie è, per costruzione, omeomorfa a Σ .

La seconda parte del teorema segue dalla **Proposizione 1.11.22**. □

ESEMPIO 1.11.29. Nella **Figura 1.43** sono riportati alcuni passi della dimostrazione della **Proposizione 1.11.28** nel caso della superficie sferica S^2 . □

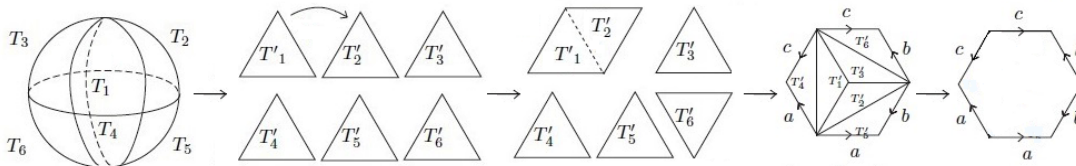


Figura 1.43: I passi della dimostrazione della **Proposizione 1.11.28** per S^2

Osserviamo che il risultato precedente non è ancora una classificazione delle superfici compatte. Per diventarlo dovremmo provare che, per $g \neq g'$, un g -toro non è omeomorfo a un g' -toro e un g -piano proiettivo non è omeomorfo ad un g' -piano proiettivo, cosa che faremo nel prossimo paragrafo.

1.11.3 Caratteristica di Eulero-Poincaré e classificazione delle superfici compatte

Un secondo risultato, riportato senza dimostrazione, fondamentale per la classificazione delle superfici compatte è il seguente.

PROPOSIZIONE 1.11.30. *Se \mathbf{T} è una triangolazione di una superficie compatta Σ , denotiamo con $V(\mathbf{T}), S(\mathbf{T}), F(\mathbf{T})$ rispettivamente il numero dei vertici, il numero degli spigoli e il numero di facce di \mathbf{T} . Allora l'intero*

$$V(\mathbf{T}) - S(\mathbf{T}) + F(\mathbf{T}) \tag{1.44}$$

non dipende da \mathbf{T} ed è, quindi, un invariante topologico della superficie Σ . □

DEFINIZIONE 1.11.31. Per una superficie compatta Σ , l'intero (1.44) definito nella precedente proposizione prende il nome di **caratteristica di Eulero-Poincaré** di Σ e si denota con $\chi(\Sigma)$. □

ESEMPIO 1.11.32. ($\chi(S^1) = 2, \chi(T_2) = 0, \chi(U_2) = 1$) Nella **Figura 1.44** sono riportate una triangolazione del toro T_2 e una del piano proiettivo U_2 . La triangolazione del toro ha 16 vertici, 48 lati e 32 facce. La triangolazione del piano proiettivo ha 6 vertici, 15 lati e 10 facce. Questi due esempi e l'**Esempio 1.42** mostrano che

le caratteristiche di Eulero-Poincaré della sfera, del toro e del piano proiettivo sono □

$$\chi(S^1) = 2, \quad \chi(T_2) = 0, \quad \chi(U_2) = 1.$$

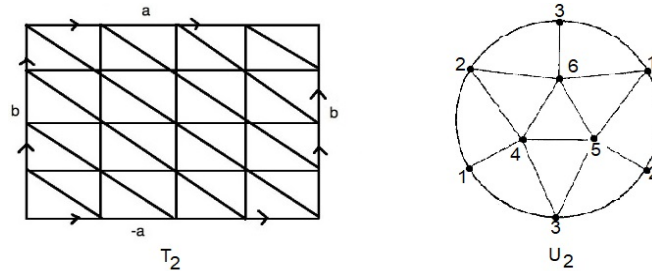


Figura 1.44: Triangolazioni del toro e del piano proiettivo

Siano T_1 e T_2 triangolazioni di due superfici compatte Σ_1 e Σ_2 , rispettivamente. Costruiamo la somma connessa $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ tagliando le parti interne di due triangoli (si osservi che l'interno di un triangolo è omeomorfo a B^1), ciascuno in una delle due triangolazioni, e incollando i lati dell'uno a quelli dell'altro. Allora è chiaro T_1 e T_2 inducono su $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ una triangolazione per cui $V(T_1) + V(T_2) - 3$ è il numero dei vertici, $S(T_1) + S(T_2) - 3$ è il numero dei lati e $F(T_1) + F(T_2) - 2$ è il numero delle facce. Da questa osservazione segue subito che

$$\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2$$

e da ciò segue che, per ogni intero $g > 0$,

$$\chi(T_g) = 2 - 2g, \quad \chi(U_g) = 2 - g. \quad (1.45)$$

Le ultime due relazioni, insieme all'invarianza topologica della caratteristica di Eulero-Poincaré, assicurano che, per g, g' interi positivi distinti, un g -toro non è omeomorfo a un g' -toro e un g -piano proiettivo non è omeomorfo ad un g' -piano proiettivo.

In conclusione, i risultati relativi alle superfici fin qui ottenuti possono sintetizzarsi nei seguenti due teoremi di classificazione delle superfici compatte.

TEOREMA 1.11.33. (Prima classificazione delle superfici compatte) Sia Σ una superficie compatta, allora:

- se Σ non contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (**superficie orientabile**), Σ è omeomorfa ad una sfera S^2 o ad un g -toro, $g > 0$;
- se Σ contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Möbius (**superficie non orientabile**), Σ è omeomorfa al piano proiettivo (reale) o ad un g -piano proiettivo, $g > 1$.

Inoltre, per $g \neq g'$, un g -toro non è omeomorfo a un g' -toro e un g -piano proiettivo non è omeomorfo ad un g' -piano proiettivo. \square

TEOREMA 1.11.34. (Seconda classificazione delle superfici compatte) *Due superfici compatte sono omeomorfe se, e soltanto se, hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré e sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili. \square*

Capitolo 2

Elementi di Topologia Algebrica

*“ Le forme create dal matematico,
come quelle create dal pittore o dal poeta,
devono essere belle;
le idee, come i colori o le parole,
devono legarsi armoniosamente.
La bellezza e' il requisito fondamentale:
al mondo non c'e' un posto perenne per la matematica brutta.”*

Godfrey Harold Hardy

2.1 Notazioni

Nel seguito, a meno di avviso contrario, le lettere latine maiuscole non esplicitamente definite denoteranno sempre degli spazi topologici e verrà utilizzato il termine **mappa** in luogo di funzione continua. Così, per esempio, la frase “ f è una mappa tra X e Y ” significa “ f è una funzione continua tra lo spazio topologico X e lo spazio topologico Y ”. Continueremo, inoltre, ad usare le seguenti notazioni standard:

$I = [0, 1]$ = intervallo unitario chiuso di \mathbb{R} .

\mathbb{R}^n = spazio euclideo n -dimensionale.

$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$ = superficie sferica unitaria di dimensione $n - 1$.

$D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq 1\}$ = sfera unitaria chiusa di dimensione n .

$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\}$ = sfera unitaria aperta di dimensione n .

I, S^{n-1}, D^n, B^n si supporranno sempre dotati della topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , a seconda del caso.

2.2 Categorie e funtori

La **teoria delle categorie**, fondata nel 1945 dai matematici **Samuel Eilenberg** e **Saunders MacLane**, è utilizzata come linguaggio unificante per descrivere in modo semplice, ma preciso e formale, molti risultati, situazioni e costruzioni generali che si incontrano in diversi rami della matematica e che, in qualche modo, si prestano a essere trasportati da una teoria ad un'altra. In queste note, per esempio, vedremo come ad uno spazio topologico X e ad un suo punto p è possibile associare un gruppo, il **gruppo fondamentale** di X rispetto a p , in modo tale che alcune proprietà topologiche importanti della coppia (X, p) possano leggersi, a volte in modo più semplice, studiando il gruppo associato.

Il linguaggio delle categorie è nato, ed è molto utile, nell'ambito della topologia algebrica, teoria della quale esporremo alcuni argomenti introduttivi. È questo il motivo per cui vogliamo premettere i concetti di *categoria* e di *funto*, anche se essi non sono strettamente necessari per l'esposizione degli argomenti che tratteremo: *la loro utilizzazione in qualche punto di queste note vuole avere soltanto una valenza didattica.*

DEFINIZIONE 2.2.1. (Categorie) Una **categoria** \mathcal{C} è una coppia

$$(\text{Obj}(\mathcal{C}), \{Hom_{\mathcal{C}}(A, B)\}_{A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})}),$$

ove

- (a) $\text{Obj}(\mathcal{C})$ è una *classe* i cui elementi si dicono **oggetti** di \mathcal{C} ;
- (b) per ogni coppia (A, B) di oggetti di \mathcal{C} , $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ è un *insieme*, i cui elementi sono detti **morfismi** di A in B ;
- (c) per ogni terna (A, B, C) di oggetti di \mathcal{C} con $Hom_{\mathcal{C}}(A, B), Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \neq \emptyset$, risulta $Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \neq \emptyset$ ed esiste un'applicazione, detta **composizione di morfismi**,

$$\circ : (g, f) \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow g \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C);$$

in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

- (i) se A, B, C, D sono oggetti di \mathcal{C} e se

$$f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B), g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C), h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D),$$

risulta

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, D);$$

- (ii) per ogni oggetto A di \mathcal{C} , esiste un elemento $i_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, detto **morfismo identico di A** , tale che, per ogni oggetto B di \mathcal{C} e per ogni due morfismi $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ si ha

$$f \circ i_A = f, \quad i_A \circ g = g.$$

- (iii) se A, B, C, D sono oggetti di \mathcal{C} , risulta

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \emptyset \Rightarrow A = C, B = D.$$

Quando non vi è luogo ad equivoci, scriviamo $\text{Hom}(A, B)$ invece di $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. \square

OSSERVAZIONE 2.2.2. (Unicità del morfismo identico) Assegnata una categoria \mathcal{C} , per ogni oggetto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}(A, A)$ contiene un unico morfismo identico. Detti infatti i_A e i'_A due morfismi identici di $\text{Hom}(A, A)$, risulta $i_A = i_A \circ i'_A = i'_A$. \square

OSSERVAZIONE 2.2.3. Assegnata una categoria \mathcal{C} , per ogni oggetto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, la composizione di morfismi

$$\circ : (g, f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A);$$

è un'operazione associativa e unitaria in $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$. \square

Per evitare di esporre concetti che non utilizzeremo, nel seguito ci limiteremo a considerare categorie i cui oggetti sono insiemi, di solito dotati di uno stesso tipo di struttura algebrica o geometrica, e i cui morfismi sono applicazioni. Queste prendono il nome di **categorie di insiemi** e vedremo che per esse gli assiomi di categoria possono semplificarsi notevolmente. Prima di fare ciò, per completezza, riportiamo due esempi di categorie che non sono categorie di insiemi.

ESEMPIO 2.2.4. Siano \mathbb{F} un campo, $\mathbb{F}^{m,n}$ l'insieme delle matrici quadrate di tipo $m \times n$ a coefficienti in \mathbb{F} , \mathbb{N}^+ l'insieme dei numeri naturali positivi e, posto $\text{Obj}(\mathcal{C}) = \mathbb{N}^+$, si ponga

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m) = \mathbb{F}^{n,m},$$

per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$. Allora è facile verificare che $\mathcal{C} = (\mathbb{N}^+, \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(n, m)\}_{n,m \in \mathbb{N}^+})$ è una categoria qualora si definisca la composizione dei morfismi come il prodotto di matrici righe per colonne. Qui l'identità in $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(n, n)$, $n \in \mathbb{N}^+$, è chiaramente la matrice unitaria d'ordine n . Evidentemente i morfismi di questa categoria non sono applicazioni e quindi \mathcal{C} non è una categoria d'insiemi. \square

ESEMPIO 2.2.5. (Categoria associata ad un insieme parzialmente ordinato) Siano X un insieme non vuoto e \leq una relazione d'ordine parziale su X . Per ogni $x, y \in X$ con $x \leq y$, si definisca un simbolo j_y^x con la proprietà $j_t^y \circ j_y^x = j_t^x$, per ogni $x, y, t \in X$ tali che $x \leq y \leq t$. Allora, posto

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_X}(x, y) = \begin{cases} \{j_y^x\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}, \text{ per ogni } x, y \in X,$$

è facile verificare che $\mathcal{C}_X = (X, \{\text{Hom}_{\mathcal{C}_X}(x, y)\}_{x, y \in X})$ è una categoria. Anche in questa categoria, come nell'esempio precedente, i morfismi non sono applicazioni e quindi \mathcal{C} non è una categoria d'insiemi. \square

DEFINIZIONE 2.2.6. (Categorie di insiemi) Una **categoria di insiemi** \mathcal{C} è una coppia

$$(\text{Obj}(\mathcal{C}), \{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\}_{A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})}),$$

ove

- $\text{Obj}(\mathcal{C})$ è una classe di insiemi, detti **oggetti** di \mathcal{C} ,
- per ogni coppia (A, B) di oggetti di \mathcal{C} , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ è **un insieme di funzioni di A in B** , detti **morfismi** di A in B ,

in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

- per ogni oggetto A , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ contiene la funzione identità i_A di A ,
- se A, B, C sono oggetti, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, allora la funzione composta $g \circ f$ appartiene a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$. \square

Una semplice verifica prova che le categorie di insiemi sono casi particolari di categorie secondo la **Definizione 2.2.1**.

ESEMPI 2.2.7. Di seguito si riportano alcuni esempi di categorie.

1. La **Categoria \mathcal{S} degli insiemi**:

- $\text{Obj}(\mathcal{S})$ è la classe di tutti gli insiemi;
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B)$ è l'insieme delle funzioni di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{S}$.

2. La **Categoria \mathcal{T} degli spazi topologici**:

- $\text{Obj}(\mathcal{T})$ è la classe di tutti gli spazi topologici;
- $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, B)$ è l'insieme delle funzioni continue di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{T}$.

3. La **Categoria \mathcal{PT} degli spazi topologici puntati**:

- $Obj(\mathcal{PT})$ è la classe di tutti gli spazi topologici puntati, ove per spazio topologico puntato si intende una coppia (A, a) formata da uno spazio topologico A e da un suo punto a ;
- $Hom_{\mathcal{PT}}((A, a), (B, b))$ è l'insieme delle funzioni continue f di A in B tali che $f(a) = b$, per ogni $(A, a), (B, b) \in \mathcal{PT}$.

4. La **Categoria \mathcal{G} dei gruppi**:

- $Obj(\mathcal{G})$ è la classe di tutti i gruppi;
- $Hom_{\mathcal{G}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di gruppo di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{G}$.

5. La **Categoria \mathcal{A} dei gruppi abeliani**:

- $Obj(\mathcal{A})$ è la classe di tutti i gruppi abeliani;
- $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di gruppo di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{A}$.

6. La **Categoria \mathcal{R} degli anelli (risp. \mathcal{R}_u degli anelli unitari)**:

- $Obj(\mathcal{R})$ è la classe di tutti gli anelli (unitari);
- $Hom_{\mathcal{R}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di anello (unitario) di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{R}$ (\mathcal{R}_u).

7. La **Categoria \mathcal{F} dei campi**:

- $Obj(\mathcal{F})$ è la classe di tutti i campi;
- $Hom_{\mathcal{F}}(A, B)$ è l'insieme degli omomorfismi di campo di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{F}$.

8. La **Categoria \mathcal{V} degli spazi vettoriali su un campo**¹:

- $Obj(\mathcal{V})$ è la classe di tutti gli spazi vettoriali sopra un campo;
- $Hom_{\mathcal{V}}(A, B)$ è l'insieme delle funzioni lineari di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{V}$.

9. La **Categoria \mathcal{V}_K degli spazi vettoriali su un campo K** :

¹Qui il campo non è fissato. Ciò significa che due oggetti della categoria possono essere spazi vettoriali su campi diversi.

²Si osservi che, se A e B sono spazi vettoriali su campi diversi, risulta $Hom_{\mathcal{V}}(A, B) = \emptyset$.

- $Obj(\mathcal{V}_K)$ è la classe di tutti gli spazi vettoriali su un campo K ;
- $Hom_{\mathcal{V}_K}(A, B)$ è l'insieme delle funzioni lineari di A in B , per ogni $A, B \in \mathcal{V}_K$. \square

DEFINIZIONE 2.2.8. (Sottocategorie) Una categoria \mathcal{D} si dice **sottocategoria** di una categoria \mathcal{C} , e si scrive $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, se ogni oggetto di \mathcal{D} è un oggetto di \mathcal{C} e vale la seguente proprietà

$$Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B), \text{ per ogni } A, B \in \mathcal{D} \quad (2.1)$$

Se nella (2.1) vale sempre l'uguaglianza, allora \mathcal{D} si dice **sottocategoria completa**, o **piena**, di \mathcal{C} . \square

ESEMPIO 2.2.9. Gli esempi di categorie da 2.2.7-2 a 2.2.7-9 sono sottocategorie (non complete) della categoria degli insiemi \mathcal{S} . La categoria dei gruppi abeliani \mathcal{A} è sottocategoria completa della categoria dei gruppi \mathcal{G} . La categoria dei campi \mathcal{F} è sottocategoria completa della categoria degli anelli \mathcal{R} . La categoria \mathcal{V}_K degli spazi vettoriali su un campo K è sottocategoria completa della categoria degli spazi vettoriali \mathcal{V} . \square

DEFINIZIONE 2.2.10. Siano A, B due oggetti di una categoria \mathcal{C} ed f un morfismo di A in B . Si dice che f è un'**equivalenza** di A in B se esiste un morfismo g di B in A tale che

$$g \circ f = id_A \text{ e } f \circ g = id_B. \quad (2.2)$$

Ovviamente, in queste ipotesi, g è un'**equivalenza** di B in A , che si dice **inversa** di f . Due oggetti di \mathcal{C} si dicono **equivalenti** se esiste un'**equivalenza** tra essi. \square

ESEMPIO 2.2.11. Nella categoria degli insiemi, un'**equivalenza** tra due oggetti A, B è una funzione biunivoca tra A e B . \square

ESERCIZIO 2.2.12. Trovare le equivalenze negli esempi di categorie da 2.2.7-2 a 2.2.7-9.

DEFINIZIONE 2.2.13. (Funtori) Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie e

$$F : A \in Obj(\mathcal{C}) \rightarrow F(A) \in Obj(\mathcal{D})$$

una funzione tra gli oggetti di \mathcal{C} e quelli di \mathcal{D} . Si dice che F è un **funto**re **covariante di \mathcal{C} in \mathcal{D}** , e si scrive $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, se, per ogni due oggetti A, B di \mathcal{C} , ad ogni morfismo $f : A \rightarrow B$ resta associato un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ in modo che siano verificate le seguenti proprietà:

- $F(id_A) = id_{F(A)}$, per ogni oggetto A di \mathcal{C} ,

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, per ogni due morfismi $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Il morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$, se non vi è luogo ad equivoci, si denota più semplicemente con f_* . \square

OSSERVAZIONE 2.2.14. È possibile definire anche un **funtore controvariante** imponendo che ad ogni morfismo $f : A \rightarrow B$ sia associato un morfismo $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ in modo tale che si abbia $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, per ogni due morfismi $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. \square

ESEMPIO 2.2.15. La funzione F che ad ogni spazio topologico associa l'insieme dei suoi punti, ponendo $F(f) = f$ per ogni funzione continua $f : A \rightarrow B$ tra due spazi A, B , risulta un funtore covariante (**funtore distratto**) della categoria degli spazi topologici \mathcal{T} in quella \mathcal{S} degli insiemi. È chiaro che si può definire un "funtore distratto" per ciascuno degli **Esempi 2.2.7** e, più in generale, per ogni categoria di insiemi. \square

ESEMPIO 2.2.16. Fissato un campo K e un insieme A , denotiamo con $K[A]$ lo spazio vettoriale su K costruito considerando A come base (**spazio vettoriale libero su A**). Fissati due insiemi A, B , ogni funzione $f : A \rightarrow B$ si estende ad una funzione lineare \tilde{f} tra $K[A]$ e $K[B]$. La funzione F che ad ogni insieme A associa lo spazio vettoriale $K[A]$, ponendo $F(f) = \tilde{f}$ per ogni funzione $f : A \rightarrow B$, risulta un funtore covariante della categoria degli insiemi \mathcal{S} in quella \mathcal{V}_K degli spazi vettoriali su K . \square

ESERCIZIO 2.2.17. Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ un'equivalenza tra due oggetti A, B di \mathcal{C} e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore. Provare che $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ è un'equivalenza di $F(A)$ in $F(B)$.

Pur non avendo la possibilità di trattarle in questa sede, avvertiamo che molte situazioni e definizioni della teoria degli insiemi che possono considerarsi attraverso "proprietà di universalità" si generalizzano in modo naturale alla teoria delle categorie. Giusto per dare un esempio, vediamo come si generalizza la nozione di prodotto cartesiano di due insiemi.

DEFINIZIONE 2.2.18. Siano \mathcal{C} una categoria, X_1, X_2 due suoi oggetti e supponiamo che esista un oggetto X con la seguente proprietà:

esistono un morfismo $p_1 : X \rightarrow X_1$ e uno $p_2 : X \rightarrow X_2$ tali che, per ogni oggetto $T \in \mathcal{C}$ e per ogni due morfismi $f : T \rightarrow X_1, g : T \rightarrow X_2$, esiste un unico morfismo $h : T \rightarrow X$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f} & X_1 \\
 \downarrow g & \searrow h & \uparrow p_1 \\
 X_2 & \xleftarrow{p_2} & X
 \end{array}$$

cioè tale che $f = p_1 \circ h$ e $g = p_2 \circ h$.

Un oggetto X di \mathcal{C} con la proprietà precedente, e un qualunque oggetto ad esso equivalente, prende il nome di **prodotto** di X_1 e X_2 e si denota con $X_1 \times X_2$. \square

È immediato verificare che nella categoria degli insiemi la nozione di prodotto appena esposta coincide con quella di prodotto cartesiano e nelle categorie algebriche definite negli esempi precedenti il prodotto di due spazi è proprio il prodotto di tali spazi come oggetti della categoria cui appartengono.

Altre proprietà degli oggetti che si definiscono in una categoria sono, per esempio, quelle di *oggetto iniziale* e di *oggetto finale*.

DEFINIZIONE 2.2.19. (Oggetti iniziale e finale) Sia \mathcal{C} una categoria. Un oggetto 0 di \mathcal{C} si dice **oggetto iniziale** se, per ogni oggetto A di \mathcal{C} , esiste un unico morfismo di 0 in A . Un oggetto u di \mathcal{C} si dice **oggetto finale** se, per ogni oggetto A di \mathcal{C} , esiste un unico morfismo in di A in u . Un oggetto che sia iniziale e finale si dice **oggetto zero**. \square

ESERCIZIO 2.2.20. *Provare che due oggetti iniziali di una categoria sono equivalenti e che la stessa proprietà vale per gli oggetti finali. Provare inoltre che un oggetto equivalente ad un oggetto iniziale (risp. finale) è un oggetto iniziale (risp. finale).*

ESEMPIO 2.2.21. Nella categoria degli insiemi, l'insieme vuoto è un oggetto iniziale e i singleton dei punti sono oggetti finali, quindi non esiste un oggetto zero.

Nella categoria dei gruppi, il gruppo con un solo elemento è un oggetto zero.

Nella categoria degli spazi topologici, lo spazio vuoto è l'unico oggetto iniziale e gli spazi con un solo punto sono gli oggetti finali, quindi non esiste un oggetto zero.

Nella categoria degli spazi topologici puntati, ogni spazio con un solo punto è un oggetto zero.

Nella categoria degli spazi vettoriali, lo spazio nullo è un oggetto zero.

Nella categoria degli anelli e in quella dei campi non esistono oggetti iniziali e finali perchè esistono due morfismi distinti di ogni oggetto in se stesso (morfismo identico e morfismo nullo). \square

Terminiamo il paragrafo osservando che, in generale, in una categoria non sono assicurate le esistenze del prodotto di due oggetti, di un oggetto iniziale e di un oggetto finale.

2.2.1 Il funtore “componenti connesse”

Sia X uno spazio topologico e denotiamo con $F(X)$ l'insieme delle sue componenti connesse. Assegnate una mappa $f : X \rightarrow Y$ di X in uno spazio topologico Y e una componente connessa C di X , $f(C)$ è un sottospazio connesso di Y e, quindi, è contenuto in una componente connessa di Y , che denotiamo con $f_*(C)$. Allora è facile verificare che la funzione

$$F : X \in \mathcal{T} \rightarrow F(X) \in \mathcal{S}$$

risulta un funtore tra la categoria degli spazi topologici e quella degli insiemi qualora si ponga

$$F(f) = f_*, \text{ per ogni } f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y).$$

PROPOSIZIONE 2.2.22. *Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa suriettiva. Allora anche f_* è suriettiva e, quindi, risulta*

$$|F(Y)| \leq |F(X)|.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia C una componente connessa di Y e supponiamo f suriettiva. Per ogni elemento $a \in C$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = a$ e questo implica che, per la componente connessa C_x di x in X , risulta $f(C_x) \subseteq C$. Ne segue che $f_*(C_x) = C$ e l'asserto è provato. \square

2.3 Connessione per archi

Nel seguito prenderemo in considerazione mappe tra un intervallo chiuso di \mathbb{R} e uno spazio topologico X . È facile rendersi conto che ogni mappa $g : [a, b] \rightarrow X$ può essere riparametrizzata nell'intervallo $[0, 1]$ componendo g con l'unico omeomorfismo lineare (cfr. **Osservazione 1.5.20**)

$$\varphi : t \in I \rightarrow (b - a)t + a \in [a, b]$$

per cui è $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$. In altre parole, lo studio di g si può ricondurre a quello della mappa

$$f = g \circ \varphi : t \in [0, 1] \rightarrow g((b-a)t + a) \in X \quad (2.3)$$

che è definita in $[0, 1]$, assume agli estremi i valori $f(0) = g(a)$, $f(1) = g(b)$ e ha lo stesso codominio di g . Per questo motivo non è restrittivo limitarsi a considerare solo mappe definite nell'intervallo $[0, 1]$.

DEFINIZIONE 2.3.1. (Archi e lacci) Siano x_0, x_1 due punti di uno spazio topologico X . Una mappa

$$f : I \rightarrow X, \quad \text{con } f(0) = x_0 \text{ e } f(1) = x_1, \quad (2.4)$$

prende il nome di **arco**, o **cammino**, di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 . I punti x_0 e x_1 si dicono anche **estremi** dell'arco. L'immagine $f(I)$ di I mediante f prende il nome di **sostegno dell'arco**. Un arco di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 si dice anche **arco tra** x_0 e x_1 , o da x_0 a x_1 , o di **estremi** x_0, x_1 . Un arco avente i punti iniziale e finale coincidenti con x_0 prende il nome di **laccio**, o **cappio**, o **loop**, con **punto base** x_0 . \square

OSSERVAZIONE 2.3.2. Ad ogni mappa $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X$ resta associato l'arco f definito dalla (2.3) e che prende il nome di **riparametrizzazione lineare di g in $[0, 1]$** . Più in generale, posto

$$\varphi' : t \in [c, d] \rightarrow \frac{(b-a)t + ad - bc}{d-c} \in [a, b], \quad (2.5)$$

la mappa $g \circ \varphi' : [c, d] \rightarrow X$ prende il nome di **riparametrizzazione lineare di g in $[c, d]$** . Qui, come facilmente si prova, φ' è l'unico omeomorfismo lineare tra $[c, d]$ e $[a, b]$ tale che $\varphi'(c) = a$ e $\varphi'(d) = b$. \square

OSSERVAZIONE 2.3.3. Il sostegno di un arco $f : I \rightarrow X$ di X è un sottospazio connesso e compatto di X in quanto immagine dello spazio connesso e compatto I mediante la funzione continua f . \square

OSSERVAZIONE 2.3.4. (La curva di Peano) Il sostegno di un arco, secondo la **Definizione 2.3.1**, non sempre presenta la "forma" che intuitivamente riteniamo debba avere. Per esempio, riferendoci a ciò che si intende nel linguaggio comune, potremmo essere indotti a pensare che il sostegno di un arco in \mathbb{R}^2 sia privo di punti interni mentre ciò in generale non è vero. Per esempio, la cosiddetta **curva di Peano** è un arco di \mathbb{R}^2 il cui sostegno è il quadrato $I \times I$. Tale curva fu introdotta da G. Peano nel gennaio del 1890 in un articolo dal titolo "*Sur une curve qui remplit toute une aire plane*" pubblicato sulla rivista tedesca "*Mathematische Annalen*". \square

Avvertiamo il Lettore che qualche volta nel seguito, se non vi è luogo ad equivoci, *confonderemo un arco col proprio sostegno*.

ESEMPIO 2.3.5. (Laccio costante) Sia $x \in X$. La **mappa costante** $k_x : s \in I \rightarrow x \in X$ è un arco. Qui i punti iniziale e finale coincidono con x , così k_x è un laccio con punto base x (**laccio costante in x**) \square

ESEMPIO 2.3.6. (Arco inverso) Sia $f : I \rightarrow X$ un arco da x_0 a x_1 . Allora la mappa

$$\bar{f} : s \in I \rightarrow f(1 - s) \in X \quad (2.6)$$

è un arco da x_1 a x_0 , che si dice **arco inverso** di f . In alcuni testi l'arco inverso di f è denotato con f^{-1} . Osserviamo esplicitamente che \bar{f} non è la funzione inversa di f , che tra l'altro potrebbe non esistere non essendo f necessariamente biunivoca. Osserviamo ancora che f e \bar{f} hanno lo stesso sostegno ma individuano su questo orientamenti diversi: il sostegno di f ha verso di percorrenza da x_0 a x_1 , quello di \bar{f} ha verso di percorrenza opposto. \square

LEMMA 2.3.7. (Lemma di incollamento) Siano X, Y due spazi topologici e A, B due chiusi di X tali che $X = A \cup B$. Siano, inoltre, $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ due mappe coincidenti su $A \cap B$. Allora la seguente funzione $h : X \rightarrow Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}, \text{ per ogni } x \in X, \quad (2.7)$$

è ben definita ed è continua.

DIMOSTRAZIONE. Che la funzione h sia ben definita segue dal fatto che f e g coincidono su $A \cap B$. Ora, se C è un chiuso di Y , $f^{-1}(C)$ e $g^{-1}(C)$ sono chiusi di X perché f e g sono continue. Ne segue che $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ è un chiuso di X e h è continua. \square

Nel seguito diremo che la funzione h , definita dalla (2.7), è stata ottenuta *incollando le funzioni f e g* .

PROPOSIZIONE 2.3.8. (Concatenazione di archi) Siano $f : I \rightarrow X$ e $g : I \rightarrow X$ due archi di X rispettivamente da x_0 a x_1 e da x_1 a x_2 . Allora la funzione $f * g : I \rightarrow X$, definita da

$$f * g(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}, \quad (2.8)$$

è un arco da x_0 a x_2 .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo preliminarmente che risulta

$$f * g \left(\frac{1}{2} \right) = f(1) = g(0) = x_1;$$

quindi, la funzione $f * g$ è ben definita e risulta

$$f * g(0) = f(0) = x_0 \text{ e } f * g(1) = g(1) = x_2.$$

D'altra parte, le funzioni

$$s \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \rightarrow f(2s) \in X \quad \text{e} \quad s \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \rightarrow g(2s - 1) \in X$$

risultano continue e, in forza del **Lemma di incollamento 2.3.7**, lo è anche $f * g$. \square

L'arco $f * g$ definito dalla (2.8) prende il nome di **concatenazione**, o **prodotto**, di f e g e risulta

$$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f}. \quad (2.9)$$

OSSERVAZIONE 2.3.9. Gli omeomorfismi lineari

$$\varphi_1 : t \in \left[0, \frac{1}{2} \right] \rightarrow 2t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \varphi_2 : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \rightarrow 2t - 1 \in [0, 1]$$

sono gli unici per cui si ha $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(\frac{1}{2}) = 1$, $\varphi_2(\frac{1}{2}) = 0$, $\varphi_2(1) = 1$ (cfr.(2.5)). Così, se $f : I \rightarrow X$ e $g : I \rightarrow X$ sono due archi di X rispettivamente da x_0 a x_1 e da x_1 a x_2 , le mappe $f \circ \varphi_1$ e $g \circ \varphi_2$ sono rispettivamente le riparametrizzazioni lineari di f in $[0, \frac{1}{2}]$ e di g in $[\frac{1}{2}, 1]$ (cfr. **Osservazione 2.3.2**). Allora, la concatenazione $f * g$ si ottiene incollando la riparametrizzazione lineare di f in $[0, \frac{1}{2}]$ e quella di g in $[\frac{1}{2}, 1]$. \square

OSSERVAZIONE 2.3.10. L'operazione di concatenazione fra archi non è associativa. Infatti, se $f : I \rightarrow X$, $g : I \rightarrow X$ e $h : I \rightarrow X$ sono tre archi di X rispettivamente da x_0 a x_1 , da x_1 a x_2 e da x_2 a x_3 , risulta

$$\begin{aligned} (f * g) * h(s) &= \begin{cases} f * g(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(4s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s - 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

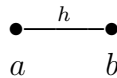
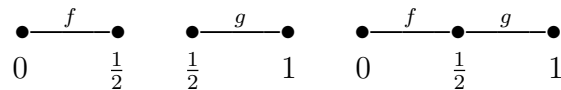
e

$$\begin{aligned}
 f * (g * h)(s) &= \begin{cases} f(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g * h(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s - 2) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s - 3) & \text{se } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

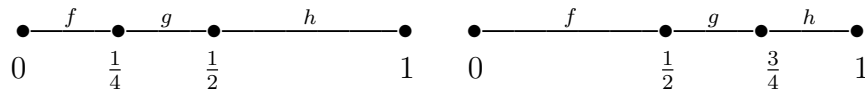
Ciò mostra che $(f * g) * h \neq f * (g * h)$. □Sia $h : I \rightarrow X$ un arco e

$$\psi : t \in [a, b] \rightarrow \frac{t - a}{b - a} \in [0, 1]$$

l'unico omeomorfismo lineare tale che $\psi(a) = 0$ e $\psi(b) = 1$ (cfr. (2.5)). La riparametrizzazione lineare di h su $[a, b]$, $h \circ \psi : [a, b] \rightarrow X$, si rappresenta graficamente col diagramma

Per esempio, con riferimento alle notazioni dell'**Osservazione 2.3.9**, i diagrammi

rappresentano rispettivamente la riparametrizzazione lineare di f su $[0, \frac{1}{2}]$, quella di g su $[\frac{1}{2}, 1]$ e la concatenazione $f * g$ di f e g . Ancora, con riferimento alle notazioni dell'**Osservazione 2.3.10**, i diagrammi

rappresentano rispettivamente gli archi $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$.

ESEMPIO 2.3.11. (Segmenti e poligionali in \mathbb{R}^n) Se x_0, x_1 sono punti distinti di \mathbb{R}^n , il **segmento** $[x_0, x_1]$ di estremi x_0, x_1 è il sostegno dell'arco definito da

$$f(s) = (1 - s)x_0 + sx_1, \text{ per ogni } s \in [0, 1].$$

Ne segue che una poligonale di estremi x_0, x_1 è il sostegno della concatenazione dei segmenti che la compongono. □

DEFINIZIONE 2.3.12. (Connessione per archi) Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** se, per ogni due punti $x_0, x_1 \in X$, esiste un arco $f : I \rightarrow X$ di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 . Un sottospazio K di X si dice **connesso per archi** se è tale rispetto alla topologia indotta da quella di X . \square

ESEMPIO 2.3.13. (Sottospazi convessi e connessi per poligonalali di \mathbb{R}^n) Per quanto esposto nell'Esempio 2.3.11, si ha che *i sottospazi convessi e i sottospazi connessi per poligonalali di \mathbb{R}^n sono connessi per archi.* \square

ESEMPIO 2.3.14. (Sottospazi stellati di \mathbb{R}^n) Un sottospazio S di \mathbb{R}^n si dice **stellato** se contiene un punto y , detto **di diramazione**, tale che, per ogni $x \in S$, il segmento di estremi x e y è contenuto in S . In queste ipotesi S , risultando unione di segmenti passanti per y , è connesso per poligonalali e, di conseguenza, è connesso per archi (Esempio 2.3.13). Si osservi che un sottospazio convesso di \mathbb{R}^n è un sottospazio stellato nel quale ogni punto è di diramazione, e viceversa. \square

PROPOSIZIONE 2.3.15. *Siano p un punto di X e $\{K_j\}_{j \in J}$ una famiglia di sottospazi di X connessi per archi e contenenti p . Allora $K = \bigcup_{j \in J} K_j$ è un sottospazio di X connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano x e y punti di K e siano K_s e K_t tali che $x \in K_s$ e $y \in K_t$. Allora esiste un arco f di K_s da x a p e uno g di K_t da p a y . Ne segue che $f * g$ è un arco da x a y di $K_s \cup K_t \subseteq K$ e, quindi, K è connesso per archi. \square

In virtù dei Lemmi 2.3.5 e 2.3.6 e della Proposizione 2.3.8, si ha subito che la relazione $\overset{arc}{\sim}$ sui punti di X definita da

$$a, b \in X; a \overset{arc}{\sim} b \Leftrightarrow \text{esiste un arco di estremi } a, b \quad (2.10)$$

è di equivalenza su X .

DEFINIZIONE 2.3.16. (Componenti connesse per archi) In uno spazio topologico X , le classi di equivalenza rispetto alla relazione (2.10) prendono il nome di **componenti connesse per archi** di X . \square

Dalla precedente definizione segue subito che *uno spazio topologico X possiede una sola componente connessa per archi se, e solo se, è connesso per archi.*

PROPOSIZIONE 2.3.17. *La componente connessa per archi di X contenente un suo fissato punto p coincide con l'unione di tutti i sottospazi di X connessi per archi e contenenti p . Inoltre, un sottospazio K di X è una componente connessa per archi di X se, e solo se, K è un sottospazio connesso per archi massimale.*

DIMOSTRAZIONE. È una immediata conseguenza della Proposizione 2.3.15. \square

PROPOSIZIONE 2.3.18. *Ogni spazio topologico connesso per archi X è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle nostre ipotesi, in forza dell'**Osservazione 2.3.3**, due arbitrari punti di X appartengono ad un connesso che li contiene e da ciò segue l'asserto. \square

ESEMPIO 2.3.19. (Uno spazio connesso e non connesso per archi) Uno spazio topologico connesso non è necessariamente connesso per archi, come mostra il seguente esempio, noto come il **pettine del topologo**. Posto in \mathbb{R}^2

$$C = \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right), 0 \leq y \leq 1, n \geq 1 \right\}, J = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\} \text{ e } \mathbf{p} = (0, 1)$$

è facile verificare che l'insieme

$$C \cup J$$

è connesso per poligonali e, quindi, è connesso e connesso per archi (cfr. **Esempio 2.3.13**). Inoltre, risulta connesso anche l'insieme (Figura 2.1)

$$X = C \cup J \cup \{\mathbf{p}\},$$

perché \mathbf{p} è di accumulazione per C e, quindi, appartiene alla sua chiusura³.

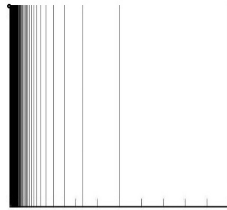


Figura 2.1: Il pettine del topologo

Facciamo vedere che X non è connesso per archi provando che, se $f : I \rightarrow X$ è un arco di punto iniziale \mathbf{p} , allora f è l'arco costante $f(x) = \mathbf{p}$, per ogni $x \in [0, 1]$. In altre parole, come è intuibile, non esiste alcun arco contenuto in X di estremi \mathbf{p} e un punto diverso da \mathbf{p} . A tale scopo, poniamo

$$Y = f^{-1}(\mathbf{p}) \subseteq [0, 1]$$

³Ricordiamo che, se un sottospazio X di uno spazio topologico è connesso, allora è connesso ogni sottospazio Y , con $X \subseteq Y \subseteq \bar{X}$ (**Proposizione 1.6.14**).

e osserviamo che Y è chiuso in $[0, 1]$ perché f è continua e $\{p\}$ è un chiuso di X . Allora, fissati $t \in Y$ e detto D l'intorno circolare di centro p e raggio $\frac{1}{2}$, per la continuità di f in t , esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(]t - \delta, t + \delta[) \subseteq D \cap X$$

e $f(]t - \delta, t + \delta[)$ è un connesso di X che contiene p . D'altra parte, ogni sottoinsieme di $D \cap X$ contenente p , se contiene punti diversi da p , è sconnesso e, quindi, $f(]t - \delta, t + \delta[)$ deve coincidere con p . Ne segue che $]t - \delta, t + \delta[\subseteq Y$, il che prova che Y è un aperto di $[0, 1]$. Possiamo così concludere che $Y = [0, 1]$ perché $[0, 1]$, essendo connesso, non può contenere sottospazi propri e non vuoti che siano contemporaneamente aperti e chiusi. \square

Un contesto nel quale la connessione e la connessione per archi sono equivalenti è mostrato dalla proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 2.3.20. *Un aperto A di \mathbb{R}^n è connesso se, e solo se, è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Nell'ipotesi che A sia connesso, sia C una componente connessa per archi di A e x un suo punto. Poiché A è aperto, esiste un intorno sferico $B_r(x)$ di centro x e raggio r contenuto in A e, essendo ogni punto di $B_r(x)$ collegabile a x mediante un arco, si ha che $B_r(x) \subseteq C$. Ne segue che C è un aperto di \mathbb{R}^n e, quindi, del sottospazio A . Ora, se A avesse più di una componente connessa per archi, A sarebbe unione di aperti non vuoti e a due a due disgiunti e ciò non è possibile perché A è connesso. Ne segue che A è connesso per archi. La seconda parte dell'asserto è vera per la **Proposizione 2.3.18**. \square

PROPOSIZIONE 2.3.21. *Se $f : X \rightarrow Y$ è una mappa e X è connesso per archi, allora $f(X)$ è un sottospazio di Y connesso per archi. Ne segue che se X, Y sono omeomorfi, allora X è connesso per archi se, e solo se, lo è anche Y .*

DIMOSTRAZIONE. Siano y_0, y_1 due punti di $f(X)$ e siano x_0, x_1 due punti di X tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Allora, detto g un arco tra x_0 e x_1 , la mappa $f \circ g$ è un arco tra y_0 e y_1 e, così, Y è connesso per archi. \square

ESEMPIO 2.3.22. (S^n è connesso per archi) S^n , $n > 0$, è immagine della funzione continua

$$x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^n$$

e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è connesso per archi in quanto connesso per poligonalità. Allora, in forza della proposizione precedente, S^n è uno spazio connesso per archi. \square

ESEMPIO 2.3.23. (Quozienti di spazi connessi per archi) Un quoziente di uno spazio connesso per archi, in quanto immagine della proiezione canonica, è connesso per archi in forza della proposizione precedente. Per esempio, il *piano proiettivo reale* è connesso per archi perché quoziente di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, che è connesso per archi. \square

ESEMPIO 2.3.24. Se σ, τ sono due topologie su un insieme X , con $\sigma \leq \tau$, la funzione identità di (X, τ) in (X, σ) è continua. Allora, in forza della proposizione precedente, la connessione per archi di (X, τ) implica quella di (X, σ) . \square

PROPOSIZIONE 2.3.25. Due spazi topologici X, Y sono connessi per archi se, e solo se, è connesso per archi il loro prodotto $X \times Y$.

DIMOSTRAZIONE. X e Y sono immagini di $X \times Y$ mediante le proiezioni e, quindi, la connessione per archi di $X \times Y$ implica quella di X e Y .

Supponiamo ora che X e Y siano connessi per archi e siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ due punti di $X \times Y$. Il prodotto $X \times \{y_0\}$, essendo omeomorfo a X , è connesso per archi e, quindi, esiste un cammino $f : I \rightarrow X \times \{y_0\}$ da (x_0, y_0) a (x_1, y_0) . Il prodotto $\{x_1\} \times Y$, essendo omeomorfo a Y , è connesso per archi e, quindi, esiste un cammino $g : I \rightarrow \{x_1\} \times Y$ da (x_1, y_0) a (x_1, y_1) . Ora, usando le due inclusioni

$$i_X : X \times \{y_0\} \rightarrow X \times Y \quad e \quad i_Y : \{x_1\} \times Y \rightarrow X \times Y$$

consideriamo i cammini di $X \times Y$ definiti da $i_X \circ f$ e $i_Y \circ g$. Allora la composizione $(i_X \circ f) * (i_Y \circ g)$ è un cammino da (x_0, y_0) a (x_1, y_1) e l'asserto è provato. \square

2.4 Omotopia

La *topologia algebrica* è il ramo della matematica che si occupa della classificazione degli spazi topologici attraverso lo studio dei funtori tra categorie di spazi topologici e categorie di strutture algebriche, quale, ad esempio, quella dei gruppi. In questo modo ad uno spazio si associano degli invarianti algebrici la cui struttura è specialmente adatta a studiare, a meno di omeomorfismi o di trasformazioni più generali, particolari proprietà topologiche dello spazio stesso. Un esempio è dato dalla costruzione del *gruppo fondamentale* che vedremo in seguito. L'*omotopia*, che iniziamo a trattare in questo numero, è uno dei primi argomenti di studio nell'ambito della topologia algebrica.

Siano A_0 e A_1 due sottospazi di uno spazio topologico Y . Intuitivamente, un'*omotopia di A_0 in A_1* si può immaginare come un processo mediante il quale, con lo scorrere del tempo in un fissato intervallo temporale, si realizza una deformazione continua di A_0 in A_1 . Si pensi, per esempio, alla deformazione di una bolla di

sapone o di un pallone che, gonfiati con continuità nel tempo, passano da uno stato "iniziale" ad uno "finale". Volendo formalizzare questa situazione in termini matematici precisi, conviene pensare A_0 e A_1 come immagini di due mappe f_0, f_1 di uno spazio topologico X in uno Y e fissare l'attenzione su come si possono descrivere le deformazioni continue di f_0 in f_1 piuttosto che quelle di $A_0 = f_0(X)$ in $A_1 = f_1(X)$. A tale scopo diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4.1. (Omotopia tra mappe) Siano X, Y spazi topologici e $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due mappe di X in Y . Una mappa

$$F : X \times I \rightarrow Y \quad (2.11)$$

prende il nome di **omotopia libera**, o più semplicemente **omotopia, tra f_0 e f_1 o da f_0 a f_1** , se risulta

$$F(x, 0) = f_0(x) \text{ e } F(x, 1) = f_1(x), \text{ per ogni } x \in X. \quad (2.12)$$

Equivalentemente, se poniamo

$$F(x, t) = f_t(x), \text{ per ogni } t \in I, \quad (2.13)$$

un'omotopia F tra f_0 e f_1 può anche definirsi come una famiglia di mappe

$$F = \{f_t : X \rightarrow Y\}_{t \in I} \quad (2.14)$$

tale che la funzione $F : X \times I \rightarrow Y$ definita dalla (2.13) è continua.

Quando esiste un'omotopia tra due mappe f_0, f_1 , si dice che f_0 e f_1 sono **omotope**, o hanno lo **stesso tipo di omotopia**, e si scrive $f_0 \sim f_1$, o $f_0 \stackrel{F}{\sim} f_1$, o $F : f_0 \rightarrow f_1$. \square

Parlando informalmente, se pensiamo alla variabile $t \in [0, 1]$ come ad una variabile temporale, l'omotopia $F(x, t)$ tra f_0 e f_1 descrive la deformazione continua nel corso del tempo della mappa f_0 nella mappa f_1 mediante la famiglia di mappe $\{f_t(x) = F(x, t)\}_{t \in I}$. In altre parole, con lo scorrere del tempo dall'istante 0 all'istante 1, la mappa $f_t(x)$ rappresenta all'istante t lo stato della deformazione di $f_0(x)$ in $f_1(x)$. Sempre in modo informale e in accordo con quanto detto all'inizio del paragrafo, possiamo anche pensare all'omotopia F come ad un processo di deformazione continua del sottospazio $f_0(X)$ di Y nel sottospazio $f_1(X)$ che, ad un istante t , vede $f_0(X)$ deformato nel sottospazio $f_t(X)$ (si veda la **Figura 2.2** per uno schema grafico dell'omotopia F). Nella **Figura 2.2** è evidenziato anche l'arco lungo il quale "si muove" il punto $f_0(x_0)$ durante il processo di trasformazione nel punto $f_1(x_0)$ (cfr. **Osservazione 2.4.2**).

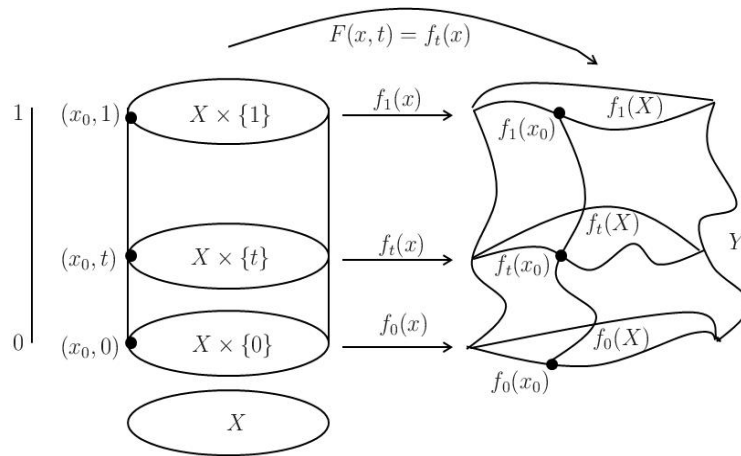


Figura 2.2: Omotopia $F(x, t)$ tra le mappe $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$

Si noti che le deformazioni che stiamo descrivendo non sono necessariamente iniettive, nel senso che nel corso delle trasformazioni punti distinti possono andare ad "incollarsi" in un medesimo punto.

OSSERVAZIONE 2.4.2. Siano $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ due mappe di X in Y e F un'omotopia tra f_0 e f_1 . Allora, se x_o è un punto di X , la mappa

$$F(x_o, t) : t \in I \rightarrow F(x_o, t) \in Y$$

è un arco di Y di estremi $F(x_o, 0) = f_0(x_o)$, $F(x_o, 1) = f_1(x_o)$ e tali estremi appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y . Ne segue che, se $f'_0, f'_1 : X \rightarrow Y$ sono mappe di X in Y tali che esiste un punto $x_o \in X$ per cui $f'_0(x_o)$ e $f'_1(x_o)$ non appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y , allora f'_0 e f'_1 non possono essere omotope. \square

ESEMPIO 2.4.3. (Omotopia lineare di mappe in insiemi convessi) Siano X uno spazio topologico, C un sottospazio convesso di \mathbb{R}^n , f, g due mappe di X in C e consideriamo la mappa lineare $F : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Osserviamo che, per ogni fissato $x_o \in X$, al variare di $t \in I$,

$$F(x_o, t) = (1 - t)f(x_o) + tg(x_o)$$

rappresenta in \mathbb{R}^n il segmento di estremi $f(x_o), g(x_o)$, che è contenuto in C perché C è convesso. Allora il codominio di F è contenuto in C e F risulta un'omotopia tra f e g . Abbiamo, così, che due mappe di X in un sottospazio convesso C di \mathbb{R}^n sono sempre omotope. In particolare, ogni mappa di C in se stesso è omotopa all'identità di C . \square

ESEMPIO 2.4.4. (Omotopia di mappe in insiemi stellati) Vediamo come il risultato dell'esempio precedente sui sottospazi convessi di \mathbb{R}^n si estende a quelli stellati. Siano X uno spazio topologico, S un sottospazio stellato di \mathbb{R}^n e \mathbf{y} un suo punto di diramazione. Siano f, g due mappe di X in S e consideriamo la mappa

$$F(x, t) = \begin{cases} (1 - 2t)f(x) + 2t\mathbf{y} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - t)\mathbf{y} + (2t - 1)g(x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad (2.15)$$

con $(x, t) \in X \times I$ a valori in \mathbb{R}^n , ottenuta, per ogni $x \in X$, incollando in \mathbf{y} la riparametrizzazione in $[0, \frac{1}{2}]$ del segmento di estremi $f(x)$ e \mathbf{y} con quella in $[\frac{1}{2}, 1]$ del segmento di estremi \mathbf{y} e $g(x)$. Per ogni fissato $x_o \in X$, al variare di $t \in I$, $F(x_o, t)$ descrive in \mathbb{R}^n l'unione dei segmenti di estremi $f(x_o), \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}, g(x_o)$, che è contenuta in S perché S è stellato. Allora il codominio di F è contenuto in S e F risulta un'omotopia tra f e g . Così, come per i convessi, *due mappe di X in un sottospazio stellato S di \mathbb{R}^n sono sempre omotope*. In particolare, *ogni mappa di S in se stesso è omotopa all'identità di S* . \square

ESEMPIO 2.4.5. (Omotopia tra funzioni costanti) Siano $k_a : x \in X \rightarrow a \in Y$ e $k_b : x \in X \rightarrow b \in Y$ due mappe costanti e sia F un'omotopia tra k_a e k_b . Allora, per un fissato $x_o \in X$, la funzione $F(x_o, t)$ è un arco in Y di estremi a, b e tali estremi appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y . Viceversa, assegnate le mappe costanti $k_a, k_b : X \rightarrow Y$, nell'ipotesi che a, b appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y , ogni arco $h : I \rightarrow Y$ di estremi a, b individua l'omotopia H tra k_a e k_b definita da $H(x, t) = h(t)$, per ogni $t \in I$. Abbiamo così che *due mappe costanti $k_a, k_b : X \rightarrow Y$ sono omotope se, e solo se, a e b appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y* . In particolare, *se Y è connesso per archi, due mappe costanti di X in Y sono sempre omotope*. \square

PROPOSIZIONE 2.4.6. *Siano f, g, h tre mappe di X in Y , F un'omotopia tra f e g e F' un'omotopia tra g e h . Allora la funzione*

$$F''(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F'(x, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad \text{con } (x, t) \in X \times I, \quad (2.16)$$

è un'omotopia tra f e h .

DIMOSTRAZIONE. Le restrizioni di F'' agli insiemi $X \times [0, 1/2]$ e $X \times [1/2, 1]$ sono continue e coincidono su $X \times \{1/2\}$, che è un chiuso di $X \times I$. Allora F'' è continua su $X \times I$, in forza del **Lemma di incollamento 2.3.7**, e risulta $F''(x, 0) = f(x)$ e $F''(x, 1) = h(x)$. F'' è, dunque, un'omotopia tra f e h . \square

PROPOSIZIONE 2.4.7. *Siano X, Y spazi topologici. La relazione di omotopia nell'insieme $\mathcal{C}(X, Y)$ delle funzioni continue di X in Y è di equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, la funzione

$$F : (x, t) \in X \times I \rightarrow f(x) \in Y$$

è un'omotopia tra f e se stessa e, quindi, la relazione di omotopia in $\mathcal{C}(X, Y)$ è riflessiva. Se $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ e se $F : X \times I \rightarrow Y$ è un'omotopia tra f e g , la funzione

$$F' : (x, t) \in X \times I \rightarrow F(x, 1 - t) \in Y$$

è, come subito si verifica, un'omotopia tra g e f e, quindi, la relazione di omotopia in $\mathcal{C}(X, Y)$ è simmetrica. Infine, la transitività della nostra relazione è assicurata dalla **Proposizione 2.4.6**. \square

ESEMPIO 2.4.8. In considerazione di quanto detto nell' **Esempio 2.4.5**, le classi di omotopia delle mappe da un punto ad uno spazio topologico Y sono in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse per archi di Y . \square

Una mappa $f : X \rightarrow Y$ che sia omotopa ad una mappa costante si dice **nullomotopa**. Il risultato che segue caratterizza le mappe nullomotope definite sulla circonferenza.

PROPOSIZIONE 2.4.9. (Mappe nullomotope della circonferenza) *Una mappa $f : S^1 \rightarrow Y$ è omotopa ad una mappa costante se, e solo se, f può prolungarsi ad una mappa $g : D^2 \rightarrow Y$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $k_a : x \in S^1 \rightarrow a \in Y$ sia una funzione costante e $F : k_a \rightarrow f$ un'omotopia. Allora la funzione

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} F\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}\|\right) & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{a} & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}, \text{ con } \mathbf{x} \in D^2,$$

è una mappa che risulta un prolungamento di f a D^2 , come è facile verificare. Viceversa, se esiste un prolungamento continuo $g : D^2 \rightarrow Y$ di f , è facile provare che la funzione

$$F : (\mathbf{x}, t) \in S^1 \times I \rightarrow g(t\mathbf{x}) \in Y$$

è un'omotopia tra la mappa costante in $g(\mathbf{0})$ e f . \square

PROPOSIZIONE 2.4.10. *Siano f, f' mappe omotope di X in Y e g, g' mappe omotope di Y in T . Allora $g \circ f$ e $g' \circ f'$ sono mappe omotope di X in T .*

DIMOSTRAZIONE. Siano F, G rispettivamente un'omotopia tra f e f' e un'omotopia tra g e g' e osserviamo che la funzione

$$E : (x, t) \in X \times I \rightarrow (F(x, t), t) \in Y \times I$$

è continua. Allora è continua la funzione

$$H = G \circ E : (x, t) \in X \times I \rightarrow G(F(x, t), t) \in T$$

e risulta

$$H(x, 0) = G(E(x, 0)) = G(F(x, 0), 0) = G(f(x), 0) = g(f(x)),$$

$$H(x, 1) = G(E(x, 1)) = G(F(x, 1), 1) = G(f'(x), 1) = g'(f'(x)).$$

Resta così provato che H è un'omotopia tra le mappe $g \circ f$ e $g' \circ f'$. \square

DEFINIZIONE 2.4.11. (Equivalenza omotopica tra spazi) Una mappa $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi topologici X, Y prende il nome di **equivalenza omotopica di X in Y** se esiste una mappa $g : Y \rightarrow X$ tale che $g \circ f$ è omotopa all'identità id_X di X e $f \circ g$ è omotopa all'identità id_Y di Y . In queste ipotesi è chiaro che g è un'equivalenza omotopica di Y in X e si dice che f e g sono **omotopicamente inversa** l'una dell'altra. Gli spazi X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti**, se esiste un'equivalenza omotopica tra X e Y . \square

PROPOSIZIONE 2.4.12. *La relazione di equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi topologici.*

DIMOSTRAZIONE. La riflessività e la simmetria della relazione sono di immediata verifica, proviamone la transitività. Siano $X \sim Y, Y \sim T$ e

$$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X \quad (g \circ f \sim id_X, f \circ g \sim id_Y),$$

$$f' : Y \rightarrow T, g' : T \rightarrow Y \quad (g' \circ f' \sim id_Y, f' \circ g' \sim id_T)$$

equivalenze omotopiche. Allora, essendo $g' \circ f' \sim id_Y$, in forza della **Proposizione 2.4.10**, abbiamo

$$(g' \circ f') \circ f \sim id_Y \circ f = f,$$

e risulta

$$(g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \sim g \circ f \sim id_X.$$

In modo analogo si prova che

$$(f' \circ f) \circ (g \circ g') \sim id_T$$

e, così, resta provato che è $X \sim T$. \square

OSSERVAZIONE 2.4.13. (Omeomorfismi e equivalenze omotopiche) Un omeomorfismo tra due spazi topologici è, come subito si verifica, un'equivalenza omotopica e, quindi, come c'era da aspettarsi, *spazi omeomorfi sono anche omotopi*. Il "viceversa" non vale: *due spazi omotopicamente equivalenti non sono necessariamente omeomorfi*. Vedremo, infatti, che esistono equivalenze omotopiche che non sono funzioni biunivoche. \square

PROPOSIZIONE 2.4.14. *Se X e Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti, allora l'insieme delle componenti connesse di X e l'insieme delle componenti connesse di Y sono equipotenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia F il funtore "componenti connesse" (cfr. sez.2.2.1) tra la categoria \mathcal{T} degli spazi topologici e la categoria \mathcal{S} degli insiemi, che ad ogni spazio topologico X associa l'insieme $F(X)$ delle componenti connesse di X . Ricordiamo che, fissati X, Y e una mappa $f : X \rightarrow Y$, il funtore F induce una funzione $f_* : F(X) \rightarrow F(Y)$ definita nel seguente modo: $f_*(C)$ è la componente connessa di Y contenente $f(C)$, per ogni componente connessa C di X . Ricordiamo anche che, se f, h sono mappe omotope di X in Y e $x_o \in X$, le immagini $f(x_o)$ e $h(x_o)$ appartengono ad una stessa componente connessa per archi di Y (cfr. **Osservazione 2.4.2**) e, quindi, ad una stessa componente connessa. Allora, nelle suddette ipotesi, abbiamo $f_* = h_*$. Ora, se $X \sim Y$, e

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow X \quad (g \circ f \sim id_X, \quad f \circ g \sim id_Y),$$

sono equivalenze omotopiche, in forza della precedente osservazione, risulta

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{F(X)} \quad \text{e} \quad f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (id_Y)_* = id_{F(Y)};$$

così le funzioni

$$f_* : F(X) \rightarrow F(Y) \quad \text{e} \quad g_* : F(Y) \rightarrow F(X)$$

sono l'una l'inversa dell'altra e l'asserto è provato. \square

ESEMPIO 2.4.15. (Superfici sferiche) Per ogni intero $n > 1$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e la superficie sferica S^{n-1} sono omotopicamente equivalenti. La mappa di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ su S^{n-1} definita da

$$f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1} \quad (2.17)$$

è un'equivalenza omotopica con inversa omotopica l'inclusione

$$i : x \in S^{n-1} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Infatti, $f \circ i$ è uguale all'identità su S^{n-1} e un'omotopia F tra $i \circ f$ e l'identità su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è data da $F(x, t) = xe^{(t-1)\log\|x\|}$, come subito si prova. La restrizione della

mappa (2.17) a $D^n \setminus \{0\}$ è ancora un'equivalenza omotopica, così S^{n-1} è anche omotopicamente equivalente a $D^n \setminus \{0\}$. In particolare per $n = 2$ abbiamo che la circonferenza S^1 è omotopicamente equivalente al piano euclideo e al cerchio unitario privati di un punto. \square

DEFINIZIONE 2.4.16. (Spazi contraibili) Uno spazio X si dice **contraibile**, o **contrattile**, se è omotopicamente equivalente ad un punto. \square

PROPOSIZIONE 2.4.17. Ogni sottospazio stellato S di \mathbb{R}^n è contraibile.

DIMOSTRAZIONE. Se $Y = \{y\}$, consideriamo l'unica funzione $f : S \rightarrow Y$ e scegliamo una qualunque funzione $g : Y \rightarrow S$. Allora $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f$, per quanto esposto nell'Esempio 2.4.4, è omotopa a id_S . \square

COROLLARIO 2.4.18. Ogni sottospazio convesso C di \mathbb{R}^n è contraibile. In particolare, essendo convessi, sono contraibili \mathbb{R}^n , D^n e B^n , per ogni intero $n > 0$. Risulta, inoltre, contraibile $S^n \setminus \{x_o\}$, per ogni punto $x_o \in S^n$ e $n > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché un sottospazio convesso di \mathbb{R}^n è anche stellato, la prima parte dell'asserto segue dalla proposizione precedente. La seconda parte è vera perché $S^n \setminus \{x_o\}$ è omeomorfo a R^n . \square

OSSERVAZIONE 2.4.19. (Spazi omotopicamente equivalenti e non omeomorfi) Uno spazio topologico contraibile, che non si riduca ad un punto, ed un punto sono esempi di spazi omotopicamente equivalenti e non omeomorfi. \square

2.4.1 Omotopia relativa

In molti problemi di topologia, differentemente da quanto finora visto, si è interessati alla deformazione continua di una mappa $f_o : X \rightarrow Y$ in una $f_1 : X \rightarrow Y$ mediante mappe $f_t : X \rightarrow Y$, $t \in I$ il cui codominio non sia del tutto libero, come illustreremo col seguente esempio.

ESEMPIO 2.4.20. Sia $f : I \rightarrow X$ un arco di uno spazio topologico X di estremi $f(0) = x_o$ e $f(1) = x_1$. Sia, inoltre, $k = k_{x_o} : I \rightarrow X$ l'arco costante in x_o , cioè $k(s) = x_o$, per ogni $s \in I$. La funzione

$$F : (s, t) \in I \times I \rightarrow f((1-t)s) \in X$$

è continua e risulta

$$F(s, 0) = f(s) \text{ e } F(s, 1) = f(0) = x_o = k(s).$$

F è, dunque, un'omotopia tra f e k e così resta provato che ogni arco, in particolare ogni laccio, di X è omotopo ad una funzione costante. L'omotopia F

che abbiamo scelto deforma con continuità l'arco f nella funzione costante k mediante la famiglia di archi $\{f_t(s) = F(s, t)\}_{t \in I}$ ciascuno dei quali ha come punto iniziale $f_t(0) = f(0) = x_o$ e come punto finale $f_t(1) = f(1 - t)$, che è un punto del codominio di f . Si noti che, al variare di $t \in I$, gli archi f_t che approssimano f a k hanno primo estremo (fisso) x_o e secondo estremo (variabile) un punto del codominio di f che tende a x_o al tendere di t a 1; gli estremi di f_t , $t > 0$, quindi, non sono gli stessi di f . Così, se si è interessati alla deformazione continua dell'arco f , da x_o a x_1 , in un altro g mediante archi f_t con gli stessi estremi x_o, x_1 , l'omotopia "libera" finora usata non è più adatta a queste nuove esigenze. Con queste richieste, per esempio, è chiaro che non si può deformare f in una funzione costante, se $x_o \neq x_1$ e f non è costante. \square

Quanto appena esposto pone il problema di definire un'omotopia che, invece di agire liberamente, sia soggetta a delle condizioni iniziali che costringano le deformazioni a rispettare dei vincoli imposti a priori, come nel contesto dell'esempio precedente. Questo, come vedremo, è possibile a patto di prendere come ambiente, invece degli spazi topologici, le coppie di spazi.

Ricordiamo che, se A è un sottospazio dello spazio topologico X , la coppia (X, A) prende il nome di **coppia di spazi topologici**. Una mappa $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tra due coppie di spazi è, per definizione, una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(A) \subseteq B$. Ciò premesso, la nozione di omotopia di mappe tra due spazi topologici (cfr. **Definizione 2.4.1**) si generalizza in modo naturale al caso delle coppie di spazi topologici.

DEFINIZIONE 2.4.21. (Omotopia di mappe tra coppie di spazi) Siano $(X, A), (Y, B)$ coppie di spazi topologici e f_o, f_1 due mappe di (X, A) in (Y, B) . Una mappa

$$F : X \times I \rightarrow Y \quad (2.18)$$

prende il nome di **omotopia tra f_o e f_1** , o **da f_o a f_1** se risulta

$$F(x, 0) = f_o(x) \text{ e } F(x, 1) = f_1(x), \text{ per ogni } x \in X, \quad (2.19)$$

e

$$F(A, t) \subseteq B, \text{ per ogni } t \in I. \quad (2.20)$$

Quando esiste un'omotopia tra le mappe f_o, f_1 , si dice che f_o e f_1 sono **omotope** e si scrive $f_o \sim f_1$. \square

Naturalmente un'omotopia F tra le mappe f, g di (X, A) in (Y, B) è anche un'omotopia tra f e g considerate come mappe di X in Y e la (2.20) esprime il vincolo che l'omotopia F deve rispettare, di cui parlavamo in precedenza.

I risultati di cui alle **Proposizioni 2.4.7 e 2.4.10** si generalizzano senza difficoltà al caso delle coppie di spazi topologici e abbiamo, così, le seguenti due proposizioni.

PROPOSIZIONE 2.4.22. *Siano $(X, A), (Y, B)$ coppie di spazi topologici. La relazione di omotopia nell'insieme delle mappe di (X, A) in (Y, B) è di equivalenza.*

PROPOSIZIONE 2.4.23. *Siano f, f' mappe omotope di (X, A) in (Y, B) e g, g' mappe omotope di (Y, B) in (T, C) . Allora $g \circ f$ e $g' \circ f'$ sono mappe omotope di (X, A) in (T, C) .*

Con la definizione che segue introduciamo una classe particolare di omotopia di mappe tra coppie di spazi.

DEFINIZIONE 2.4.24. (Omotopia relativa) Siano $(X, A), (Y, B)$ coppie di spazi topologici e f_0, f_1 due mappe di (X, A) in (Y, B) tali che $f_0(a) = f_1(a)$, per ogni $a \in A$. Un'omotopia $F : f_0 \rightarrow f_1$ si dice **relativa ad A** se risulta

$$F(a, t) = F(a, 0) \text{ , per ogni } a \in A \text{ e } t \in I \quad (2.21)$$

(in queste ipotesi risulta anche $F(a, 0) = f_0(a) = f_1(a) = F(a, 1)$). Quando esiste un'omotopia relativa ad A tra le mappe f_0, f_1 , si dice che f_0 e f_1 sono **omotope relativamente ad A** e si scrive $f_0 \sim_A f_1$. \square

ESEMPIO 2.4.25. (Omotopia tra archi) Ricordiamo che un arco f da x_0 a x_1 di uno spazio topologico X è una mappa $f : I \rightarrow X$ tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Allora un tale arco può essere riguardato come una mappa

$$f : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, \{x_0, x_1\}), \text{ con } f(0) = x_0 \text{ e } f(1) = x_1,$$

tra le coppie di spazi $([0, 1], \{0, 1\})$ e $(X, \{x_0, x_1\})$, e viceversa. In questo modo, un'omotopia F tra due archi f, g da x_0 a x_1 di $(X, \{x_0, x_1\})$ **relativa ai suoi estremi** è una mappa

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

tale che

$$F(t, 0) = f(t), \quad F(t, 1) = g(t), \text{ per ogni } t \in I,$$

e

$$F(0, t) = x_0, \quad F(1, t) = x_1, \text{ per ogni } t \in I.$$

La **Proposizione 2.4.22** assicura che, se $x_0, x_1 \in X$, la relazione di omotopia relativa agli estremi sull'insieme degli archi di $(X, \{x_0, x_1\})$ di estremi x_0, x_1 è di equivalenza. \square

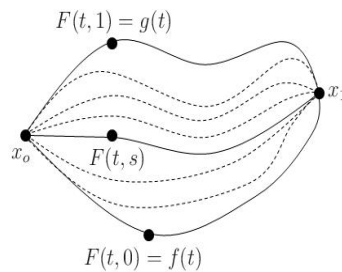


Figura 2.3: Omotopia tra due archi relativa agli estremi.

Avvertiamo il Lettore che nel seguito, **quando parleremo di omotopia tra archi, ci riferiremo sempre all'omotopia tra archi relativa agli estremi**, definita nell'esempio precedente.

2.4.2 Omotopia tra lacci

Ricordiamo che, se (X, A) è una coppia di spazi topologici con $A = \{x_o\}$, $x_o \in X$, la coppia (X, x_o) prende il nome di **spazio topologico puntato** e x_o si dice **punto base** di (X, x_o) . Nel caso degli spazi puntati, una mappa $f : (X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ è una funzione continua $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(x_o) = y_o$.

L'omotopia tra lacci è caso particolare dell'omotopia tra archi esposta nell'**Esempio 2.4.25**. Comunque, per maggiore chiarezza, preferiamo richiamarla in modo esplicito. A tale scopo, consideriamo un laccio σ di uno spazio topologico X con punto base x_o , cioè una mappa $\sigma : I \rightarrow X$ tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = x_o$. Allora σ può essere riguardato come una mappa

$$\sigma : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x_o)$$

tra le coppie di spazi $([0, 1], \{0, 1\})$ e (X, x_o) , e viceversa. Così, come caso particolare della **Definizione 2.4.21**, abbiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.4.26. (Omotopia tra lacci) Un'omotopia F tra due lacci σ, τ di (X, x_o) di punto base x_o è una mappa

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

tale che

$$F(s, 0) = \sigma(s), \quad F(s, 1) = \tau(s), \quad \text{per ogni } s \in I$$

e

$$F(0, t) = F(1, t) = x_o, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

□

Avvertiamo il Lettore che nel seguito useremo spesso, senza richiamarlo in modo esplicito, il **Lemma di incollamento 2.3.7**. In altre parole, dato uno spazio topologico X unione di due chiusi A e B , definiremo una funzione continua su X assegnandone i valori su A e su B , senza notare esplicitamente che tali valori coincidono su $A \cap B$.

PROPOSIZIONE 2.4.27. *Siano σ, τ, θ tre lacci di (X, x_o) di punto base x_o . Allora risulta*

$$(\sigma * \tau) * \theta \sim \sigma * (\tau * \theta), \quad (2.22)$$

cioè $(\sigma * \tau) * \theta$ è omotopo a $\sigma * (\tau * \theta)$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, per $s \in I$, risulta

$$\begin{aligned} (\sigma * \tau) * \theta(s) &= \begin{cases} \sigma * \tau(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \theta(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma(4s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \tau(4s - 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \theta(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \\ \sigma * (\tau * \theta)(s) &= \begin{cases} \sigma(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau * \theta(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(4s - 2) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \theta(4s - 3) & \text{se } \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

e un'omotopia H tra $(\sigma * \tau) * \theta$ e $\sigma * (\tau * \theta)$ è data da

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{4s}{t+1}\right) & \text{se } 0 \leq 4s \leq t+1 \\ \tau(4s - 1 - t) & \text{se } t+1 \leq 4s \leq t+2 \\ \theta\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right) & \text{se } t+2 \leq 4s \leq 4 \end{cases}, \quad (2.23)$$

con $(s, t) \in I \times I$. Infatti, H è continua e risulta

$$H(s, 0) = (\sigma * \tau) * \theta(s), \quad H(s, 1) = \sigma * (\tau * \theta)(s)$$

e

$$H(0, t) = \sigma(0) = x_o, \quad H(1, t) = \theta(1) = x_o.$$

L'omotopia H definita dalla (2.23) si può determinare, e quindi rappresentare graficamente, mediante il primo grafico della **Figura 2.4** usando il seguente procedimento.

1. Nel piano di coordinate (s, t) si calcolano le coordinate dei punti A, B, C, D (cfr. secondo grafico della **Figura 2.4**) intersezioni della retta $t = t_o$, $t_o \in I$, rispettivamente con le rette per i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$, $(1/4, 0)$ e $(1/2, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(3/4, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$:

$$A = (0, t_o), \quad B = \left(\frac{t_o + 1}{4}, t_o\right), \quad C = \left(\frac{t_o + 2}{4}, t_o\right), \quad D = (1, t_o).$$

2. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ sul segmento AB , cioè sull'intervallo $[0, (t_o + 1)/4]$ (cfr. **Osservazione 2.3.2**):

$$s \in [0, (t_o + 1)/4] \rightarrow \frac{4s}{t_o + 1} \in [0, 1] \rightarrow \sigma\left(\frac{4s}{t_o + 1}\right) \in X.$$

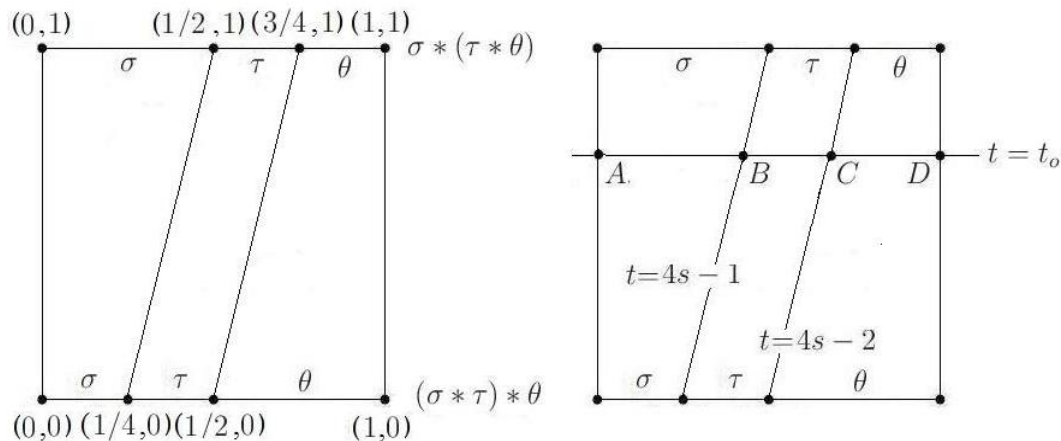


Figura 2.4: Schema per l'omotopia (2.23) tra $(\sigma * \tau) * \theta$ e $\sigma * (\tau * \theta)$

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di τ sul segmento BC , cioè sull'intervallo $[(t_o + 1)/4, (t_o + 2)/4]$:

$$s \in [(t_o + 1)/4, (t_o + 2)/4] \rightarrow 4s - 1 - t_o \in [0, 1] \rightarrow \tau(4s - 1 - t_o) \in X.$$

4. Si calcola la riparametrizzazione lineare di θ sul segmento CD , cioè sull'intervallo $[(t_o + 2)/4, 1]$:

$$s \in [(t_o + 2)/4, 1] \rightarrow \frac{4s - 2 - t_o}{2 - t_o} \in [0, 1] \rightarrow \theta\left(\frac{4s - 2 - t_o}{2 - t_o}\right) \in X.$$

5. Si definisce $H(s, t_o)$ incollando le tre riparametrizzazioni di σ, τ, θ precedentemente costruite. \square

PROPOSIZIONE 2.4.28. *Siano σ un laccio di (X, x_o) di punto base x_o e $k(t) = x_o, t \in I$, il laccio costante di X in x_o . Allora risulta*

$$\sigma * k \sim k * \sigma \sim \sigma, \quad (2.24)$$

cioè $\sigma * k, k * \sigma$ e σ sono omotopi.

DIMOSTRAZIONE. Un'omotopia tra $\sigma * k$ e σ è

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{se } 0 \leq 2s \leq t+1 \\ x_o & \text{se } t+1 \leq 2s \leq 2 \end{cases}. \quad (2.25)$$

Infatti, H è continua e risulta

$$H(s, 0) = \sigma * k(s), \quad H(s, 1) = \sigma(s)$$

e

$$H(0, t) = H(1, t) = x_o.$$

In modo analogo si vede che un'omotopia tra $k * \sigma$ e σ è data da

$$G(s, t) = \begin{cases} x_o & \text{se } 0 \leq 2s \leq 1-t \\ \sigma\left(\frac{2s+t-1}{t+1}\right) & \text{se } 1-t \leq 2s \leq 2 \end{cases}. \quad (2.26)$$

Le omotopie H e G definite dalle (2.25) e (2.26) si rappresentano rispettivamente mediante il primo e il secondo grafico della **Figura 2.5**.

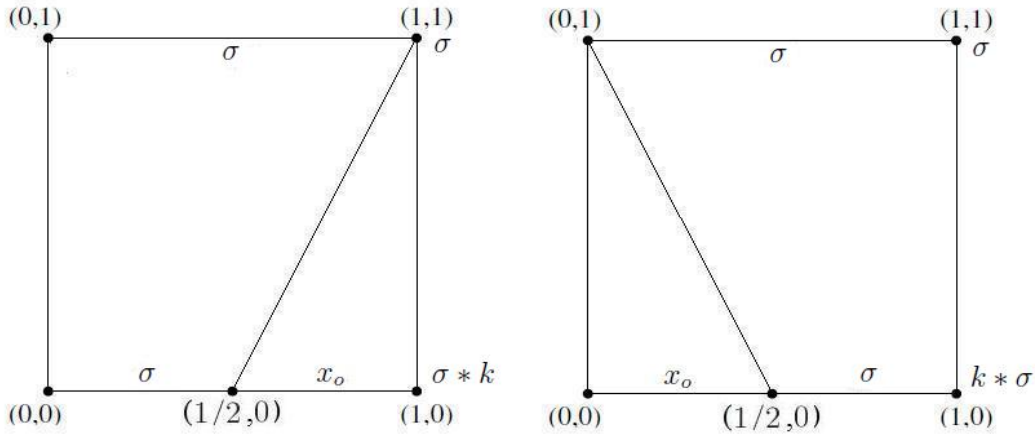


Figura 2.5: Schema per le omotopie (2.25) e (2.26)

Per calcolare l'omotopia H si procede nel seguente modo.

1. Nel piano di coordinate (s, t) si calcolano le coordinate dei punti A, B, C (cfr. il primo grafico della **Figura 2.5**) intersezioni della retta $t = t_o$, $t_o \in I$, rispettivamente con le rette per i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(1, 1)$ $(1, 0)$ e $(1, 1)$:

$$A = (0, t_o), \quad B = ((1 + t_o)/2, t_o), \quad C = (1, t_o).$$

2. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ sul segmento AB , cioè sull'intervallo $[0, (1 + t_o)/2]$ (cfr. **Osservazione 2.3.2**):

$$s \in [0, (1 + t_o)/2] \rightarrow \frac{2s}{t_o + 1} \in [0, 1] \rightarrow \sigma\left(\frac{2s}{t_o + 1}\right) \in X.$$

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di k sul segmento BC , cioè sull'intervallo $[(1 + t_o)/2, 1]$:

$$s \in [(1 + t_o)/2, 1] \rightarrow x_o \in X.$$

4. Si definisce $H(s, t_o)$ incollando le due riparametrizzazioni di σ e k precedentemente costruite.

Per calcolare l'omotopia G si procede in modo analogo.

1. Nel piano di coordinate (s, t) si calcolano le coordinate dei punti A, B, C (cfr. il secondo grafico della **Figura 2.5**) intersezioni della retta $t = t_o$, $t_o \in I$, rispettivamente con le rette per i punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(0, 1)$ $(1, 0)$ e $(1, 1)$:

$$A = (0, t_o), \quad B = ((1 - t_o)/2, t_o), \quad C = (1, t_o).$$

2. Si calcola la riparametrizzazione lineare di k sul segmento AB , cioè sull'intervallo $[0, (1 - t_o)/2]$:

$$s \in [0, (1 - t_o)/2] \rightarrow x_o \in X .$$

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ sul segmento BC , cioè sull'intervallo $[(1 - t_o)/2, 1]$:

$$s \in [(1 - t_o)/2, 1] \rightarrow \frac{2s - 1 + t_o}{1 + t_o} \in [0, 1] \rightarrow \sigma\left(\frac{2s - 1 + t_o}{1 + t_o}\right) \in X .$$

4. Si definisce $G(s, t_o)$ incollando le due riparametrizzazioni di k e σ precedentemente costruite. \square

PROPOSIZIONE 2.4.29. *Sia $k(t) = x_o, t \in I$, il laccio costante di (X, x_o) in x_o . Siano σ e $\bar{\sigma}$ un laccio di (X, x_o) di punto base x_o e il suo inverso (cfr. **Esempio 2.3.6**), rispettivamente. Allora risulta*

$$\sigma * \bar{\sigma} \sim \bar{\sigma} * \sigma \sim k , \quad (2.27)$$

cioè $\sigma * \bar{\sigma}, \bar{\sigma} * \sigma$ e k sono omotopi.

DIMOSTRAZIONE. Un'omotopia tra $\sigma * \bar{\sigma}$ e k è

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma(2(1-t)s) & \text{se } 0 \leq 2s \leq 1 \\ \sigma((1-t)(2-2s)) & \text{se } 1 \leq 2s \leq 2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Infatti, H è continua e risulta

$$H(s, 0) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{se } 0 \leq 2s \leq 1 \\ \sigma(2-2s) = \bar{\sigma}(2s-1) & \text{se } 1 \leq 2s \leq 2 \end{cases} = \sigma * \bar{\sigma}(s) ,$$

$$H(s, 1) = \sigma(0) = x_o$$

e

$$H(0, t) = H(1, t) = \sigma(0) = x_o .$$

L'omotopia H definita dalla (2.28) si rappresenta mediante il grafico della **Figura 2.6** e, per calcolarla, si usa il seguente procedimento.

1. Per ogni $t_o \in I$, si considera l'arco σ_{t_o} di X di estremi $x_o, \sigma(1 - t_o)$ definito da

$$\sigma_{t_o} : s \in [0, 1] \rightarrow \sigma((1 - t_o)s) \in X .$$

Con questa posizione, $\bar{\sigma}_{t_o}$ è l'arco di X di estremi $\sigma(1 - t_o)$ e x_o definito da

$$\bar{\sigma}_{t_o} : s \in [0, 1] \rightarrow \sigma_{t_o}(1 - s) = \sigma((1 - t_o)(1 - s))$$

e la composizione $\sigma_{t_o} * \bar{\sigma}_{t_o}$ è un laccio di X con punto base x_o .

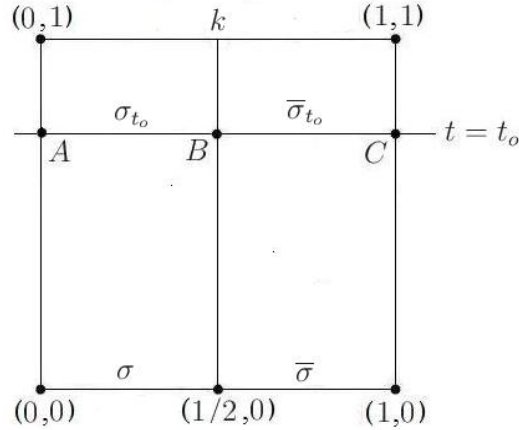


Figura 2.6: Schema per l'omotopia (2.28) tra $\sigma * \bar{\sigma}$ e k

2. Nel piano di coordinate (s, t) si considerano i punti

$$A = (0, t_o), B = (1/2, t_o), C = (1, t_o)$$

della retta $t = t_o$, con $t_o \in I$ (cfr. **Figura 2.7**).

3. Si calcola la riparametrizzazione lineare di σ_{t_o} sul segmento AB , cioè sull'intervallo $[0, 1/2]$:

$$s \in [0, 1/2] \rightarrow 2s \in [0, 1] \rightarrow \sigma_{t_o}(2s) = \sigma(2(1 - t_o)s) \in X.$$

4. Si calcola la riparametrizzazione lineare di $\bar{\sigma}_{t_o}$ sul segmento BC , cioè sull'intervallo $[1/2, 1]$:

$$s \in [1/2, 1] \rightarrow 2s - 1 \in [0, 1] \rightarrow \bar{\sigma}_{t_o}(2s - 1) = \sigma((1 - t_o)(2 - 2s)) \in X.$$

5. Si definisce $H(s, t_o)$ incollando le due riparametrizzazioni di σ_{t_o} e $\bar{\sigma}_{t_o}$ precedentemente costruite.

Scambiando il ruolo di σ e $\bar{\sigma}$ nella (2.28) e tenendo presente che $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma$, si trova un'omotopia tra $\bar{\sigma} * \sigma$ e k . \square

ESERCIZIO 2.4.30. *Provare che i risultati delle Proposizioni 2.4.27, 2.4.28, 2.4.29 valgono, con dimostrazioni analoghe, anche per l'omotopia tra archi di X da x_o a x_1 .* \square

2.5 Gruppo fondamentale

Se (X, x_o) è uno spazio puntato, la **Proposizione 2.4.22** assicura che *la relazione di omotopia sull'insieme dei lacci di (X, x_o) con punto base x_o è di equivalenza*. Denotiamo con $\Omega_1(X, x_o)$ l'insieme dei lacci di (X, x_o) con punto base $x_o \in X$ e osserviamo che l'operazione $*$ di concatenazione tra archi induce un'operazione binaria su $\Omega_1(X, x_o)$. Consideriamo l'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_o) = \Omega_1(X, x_o) / \sim, \quad (2.29)$$

di $\Omega_1(X, x_o)$ rispetto alla relazione \sim di omotopia tra lacci. Un elemento di $\pi_1(X, x_o)$ è, dunque, una classe completa di omotopia di lacci di (X, x_o) di punto base x_o ; **la classe individuata da un laccio σ sarà denotata con $[\sigma]$** .

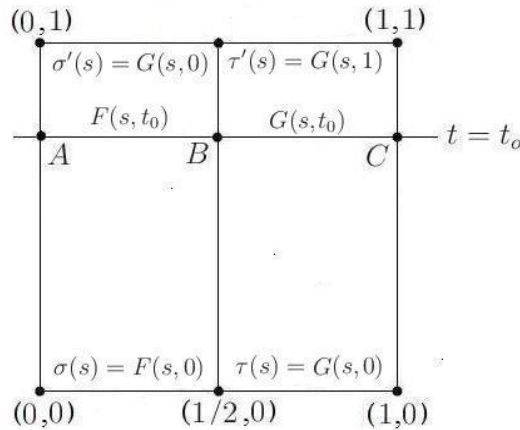


Figura 2.7: Schema per l'omotopia (2.30) tra $\sigma * \tau$ e $\sigma' * \tau'$

PROPOSIZIONE 2.5.1. *Siano $\sigma, \sigma', \tau, \tau' \in \Omega_1(X, x_o)$ quattro lacci di (X, x_o) di punto base x_o . Siano F, G omotopie di σ in σ' e di τ in τ' , rispettivamente. Allora la funzione*

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X,$$

definita da

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}, \text{ con } (s, t) \in I \times I, \quad (2.30)$$

è un'omotopia tra $\sigma * \tau$ e $\sigma' * \tau'$. Ne segue che l'operazione $*$ di concatenazione tra lacci in $\Omega_1(X, x_o)$ è compatibile con la relazione di omotopia, cioè

$$\sigma, \sigma', \tau, \tau' \in \Omega_1(X, x_o), \sigma \sim \sigma', \tau \sim \tau' \Rightarrow \sigma * \tau \sim \sigma' * \tau'. \quad (2.31)$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che H è ben definita perché le restrizioni di H agli insiemi $[0, 1/2] \times I$ e $[1/2, 1] \times I$ sono continue e coincidono su $\{1/2\} \times I$, che è un chiuso di $I \times I$. Allora H è continua su $I \times I$ in forza del **Lemma di incollamento 2.3.7**. Il resto della dimostrazione è una semplice verifica. Si osservi che l'omotopia H si può rappresentare mediante il grafico della **Figura 2.7**. \square

La proposizione precedente assicura che è ben definita in $\pi_1(X, x_o)$ la seguente operazione di **moltiplicazione**

$$[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau], \quad \text{per ogni } [\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_o), \quad (2.32)$$

che, come vedremo, è un'operazione di gruppo. Nel seguito, per semplificare le notazioni, porremo

$$[\sigma][\tau] = [\sigma * \tau], \quad \text{per ogni } [\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_o). \quad (2.33)$$

PROPOSIZIONE 2.5.2. *La struttura algebrica $(\pi_1(X, x_o), *)$ definita dalla (2.32) risulta un gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. La **proprietà associativa** segue dalla (2.22); infatti si ha:

$$([\sigma][\tau])[\theta] = [\sigma * \tau][\theta] = [(\sigma * \tau) * \theta] = [\sigma * (\tau * \theta)] = [\sigma][(\tau * \theta)] = [\sigma][([\tau][\theta])],$$

per ogni $[\sigma], [\tau], [\theta] \in \pi_1(X, x_o)$.

L'**elemento neutro**, in forza della (2.24), è la classe del laccio costante $k(t) = x_o, t \in I$, avendosi

$$[\sigma][k] = [\sigma * k] = [k * \sigma] = [k][\sigma] = [\sigma],$$

per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$.

Per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$, in forza della (2.27), l'**inverso** dell'elemento $[\sigma]$ è $[\sigma]^{-1} = [\bar{\sigma}]$, avendosi

$$[\sigma][\bar{\sigma}] = [\sigma * \bar{\sigma}] = [\bar{\sigma} * \sigma] = [\bar{\sigma}][\sigma] = [k].$$

Resta così provato che $(\pi_1(X, x_o), *)$ è un gruppo. \square

OSSERVAZIONE 2.5.3. Se $\sigma, \tau, \theta \in \Omega_1(X, x_o)$, l'espressione $\sigma * \tau * \theta$ non ha significato perché è $(\sigma * \tau) * \theta \neq \sigma * (\tau * \theta)$. È, invece, priva di ambiguità l'espressione $[\sigma * \tau * \theta]$ perché risulta $[(\sigma * \tau) * \theta] = [\sigma * (\tau * \theta)]$. \square

DEFINIZIONE 2.5.4. (Gruppo fondamentale) Il gruppo $(\pi_1(X, x_o), *)$ prende il nome di **gruppo fondamentale** dello spazio puntato (X, x_o) e si denota semplicemente con $\pi_1(X, x_o)$. \square

Il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_o)$ dipende, per costruzione, dal punto x_o . In effetti, però, possiamo mostrare che esso dipende soltanto dalla componente connessa per archi di x_o .

PROPOSIZIONE 2.5.5. *Se x_o, x'_o sono punti appartenenti ad una stessa componente connessa per archi dello spazio topologico X , allora i gruppi $\pi_1(X, x_o)$ e $\pi_1(X, x'_o)$ sono isomorfi. In particolare, se X è connesso per archi, il gruppo $\pi_1(X, x_o)$, a meno di isomorfismi, non dipende dalla scelta del punto x_o .*

DIMOSTRAZIONE. Si fissi un arco α di X di punto iniziale x_o e punto finale x'_o e sia $\bar{\alpha}$ l'arco opposto ad α . Considerati due lacci omotopi $\sigma, \sigma' \in \Omega_1(X, x_o)$, si osservi che $(\bar{\alpha} * \sigma) * \alpha$ e $(\bar{\alpha} * \sigma') * \alpha$ sono due lacci omotopi con punto base x'_o (cfr. **Esercizio 2.4.30**). Allora, è ben definita la funzione

$$\Phi_\alpha : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \rightarrow [(\bar{\alpha} * \sigma) * \alpha] \in \pi_1(X, x'_o) \quad (2.34)$$

che risulta un omomorfismo di gruppi. Si ha, infatti,

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha([\sigma][\tau]) &= \Phi_\alpha([\sigma * \tau]) \\ &= [(\bar{\alpha} * (\sigma * \tau)) * \alpha] \\ &= [(\bar{\alpha} * (\sigma * k * \tau)) * \alpha] && \text{(per la (2.24))} \\ &= [(\bar{\alpha} * ((\sigma * (\alpha * \bar{\alpha})) * \tau)) * \alpha] && \text{(per la (2.27))} \\ &= [((\bar{\alpha} * \sigma) * \alpha) * ((\bar{\alpha} * \tau) * \alpha)] && \text{(per la (2.22))} \\ &= \Phi_\alpha([\sigma])\Phi_\alpha([\tau]). \end{aligned}$$

D'altra parte, considerata la funzione

$$\Phi_{\bar{\alpha}} : [\tau] \in \pi_1(X, x'_o) \rightarrow [(\alpha * \tau) * \bar{\alpha}] \in \pi_1(X, x_o),$$

per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$ e $[\tau] \in \pi_1(X, x'_o)$, risulta

$$\Phi_{\bar{\alpha}} \circ \Phi_\alpha([\sigma]) = \Phi_{\bar{\alpha}}([(\bar{\alpha} * \sigma) * \alpha]) = [\alpha * ((\bar{\alpha} * \sigma) * \alpha) * \bar{\alpha}] = [(\alpha * \bar{\alpha}) * \sigma * (\alpha * \bar{\alpha})] = [\sigma]$$

e, analogamente, $\Phi_\alpha \circ \Phi_{\bar{\alpha}}([\tau]) = [\tau]$. Ne segue che $\Phi_{\bar{\alpha}}$ è l'inversa di Φ_α e, quindi, Φ_α , risultando biunivoca, è un isomorfismo. \square

OSSERVAZIONE 2.5.6. (L'isomorfismo Φ_α non è canonico) È da notare che la costruzione dell'isomorfismo (2.34) dipende in modo essenziale dalla scelta dell'arco α . In altre parole, se x_o, x'_o sono punti appartenenti ad una stessa componente connessa per archi dello spazio topologico X , allora i gruppi $\pi_1(X, x_o)$ e $\pi_1(X, x'_o)$ sono isomorfi ma *non canonicamente isomorfi*. \square

Tenendo conto della **Proposizione 2.5.5**, se X è uno spazio topologico connesso per archi e x_o un suo punto, il gruppo $\pi_1(X, x_o)$, a meno di isomorfismi, non dipende da x_o e, per tale motivo, sarà detto **gruppo fondamentale di X** e sarà denotato con $\pi_1(X)$.

2.5.1 Funtorialità del gruppo fondamentale

Siano $(X, x_o), (Y, y_o)$ due spazi topologici puntati. Ad ogni mappa

$$f : (X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$$

possiamo associare una funzione f_* di $\Omega_1(X, x_o)$ in $\Omega_1(Y, y_o)$ definita da

$$f_* : \sigma \in \Omega_1(X, x_o) \rightarrow f \circ \sigma \in \Omega_1(Y, y_o)$$

e, se σ, σ' sono lacci omotopi di $\Omega_1(X, x_o)$, allora $f \circ \sigma$ e $f \circ \sigma'$ sono lacci omotopi di $\Omega_1(Y, y_o)$ (cfr. **Proposizione 2.4.10**). Ne segue che f_* si estende ai gruppi fondamentali di (X, x_o) e (Y, y_o) nel seguente modo:

$$f_* : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \rightarrow [f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, y_o). \quad (2.35)$$

Inoltre, per ogni $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_o)$, risulta

$$f_*([\sigma][\tau]) = f_*([\sigma * \tau]) = [f \circ (\sigma * \tau)] = [(f \circ \sigma) * (f \circ \tau)] = [f \circ \sigma][f \circ \tau] = f_*([\sigma])f_*([\tau])$$

da cui si ricava che $f_* : \pi_1(X, x_o) \rightarrow \pi_1(Y, y_o)$ è un omomorfismo di gruppi. L'omomorfismo f_* si dice **indotto da f** .

ESEMPIO 2.5.7. (f costante $\Rightarrow f_*$ nullo) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione costante con $f(x) = y_o$, per ogni $x \in X$, e osserviamo che, per ogni laccio σ di X , la funzione $f \circ \sigma$ è il laccio di Y costante in y_o e, quindi, $[f \circ \sigma]$ è l'unità del gruppo $\pi_1(Y, y_o)$. Allora, per ogni $x_o \in X$, la funzione $f_* : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \rightarrow [f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, y_o)$ è l'omomorfismo nullo, cioè f_* trasforma ogni elemento di $\pi_1(X, x_o)$ nell'elemento neutro di $\pi_1(Y, y_o)$. \square

PROPOSIZIONE 2.5.8. *La legge π_1 che associa ad ogni spazio topologico puntato (X, x_o) il suo gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_o)$ e ad ogni mappa tra due spazi topologici puntati $f : (X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ l'omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(X, x_o) \rightarrow \pi_1(Y, y_o)$ è un funtore covariante della categoria degli spazi topologici puntati nella categoria dei gruppi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f : (X, x_o) \rightarrow (Y, y_o)$ e $g : (Y, y_o) \rightarrow (T, t_o)$ sono mappe tra spazi topologici puntati e $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$, risulta

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*([f \circ \sigma]) = g_*(f_*([\sigma])) = (g_* \circ f_*)([\sigma]),$$

cioè

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*. \quad (2.36)$$

Inoltre, per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$ risulta

$$(i_X)_*([\sigma]) = [i_X \circ \sigma] = [\sigma] = i_{\pi_1(X, x_o)}([\sigma]), \quad (2.37)$$

cioè $(i_X)_* = i_{\pi_1(X, x_o)}$, per ogni spazio topologico puntato (X, x_o) . L'asserto è così provato. \square

PROPOSIZIONE 2.5.9. *Siano $f, g : X \rightarrow Y$ due mappe omotope dello spazio topologico X nello spazio topologico Y e x_o un punto di X . Sia F un'omotopia di f in g e $\alpha(t) = F(x_o, t)$, $t \in I$, l'arco in Y tra $f(x_o)$ e $g(x_o)$ indotto dall'omotopia F . Allora, il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, f(x_o)) & \\ & \nearrow f_* & \downarrow \Phi_\alpha \\ \pi_1(X, x_o) & & \pi_1(Y, g(x_o)) \\ & \searrow g_* & \end{array}$$

è commutativo; cioè $g_* = \Phi_\alpha \circ f_*$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'isomorfismo di gruppi (2.34)

$$\Phi_\alpha : [\theta] \in \pi_1(Y, f(x_o)) \rightarrow [(\bar{\alpha} * \theta) * \alpha] \in \pi_1(Y, g(x_o))$$

e osserviamo che, per ogni $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$, si ha

$$\Phi_\alpha \circ f_*([\sigma]) = \Phi_\alpha([f \circ \sigma]) = [(\bar{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha] \quad \text{e} \quad g_*([\sigma]) = [g \circ \sigma]. \quad (2.38)$$

D'altra parte, la funzione continua

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(1 - 4s) & \text{se } 0 \leq 4s \leq 1 - t \\ F(\sigma(\frac{4s+t-1}{3t+1}), t) & \text{se } 1 - t \leq 4s \leq 2(1+t) \\ \alpha(2s - 1) & \text{se } 2(1+t) \leq 4s \leq 4 \end{cases}, \quad (s, t) \in I \times I,$$

è un'omotopia tra i lacci di Y definiti da $(\bar{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha$ e $g \circ \sigma$, avendosi

$$H(s, 0) = \begin{cases} \alpha(1 - 4s) = \bar{\alpha}(4s) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ F(\sigma(4s - 1), 0) = f(\sigma(4s - 1)) & \text{se } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = (\bar{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha(s),$$

$$H(s, 1) = F(\sigma(s), 1) = g \circ \sigma(s),$$

$$H(0, t) = H(1, t) = \alpha(1) = g(x_o).$$

Ne segue che $[(\bar{\alpha} * (f \circ \sigma)) * \alpha] = [g \circ \sigma]$, e dalle (2.38) abbiamo $\Phi_\alpha \circ f_* = g_*$, come volevamo provare. \square

COROLLARIO 2.5.10. *Sia $f : X \rightarrow Y$ una mappa omotopa ad una funzione costante $g : x \in X \rightarrow y_o \in Y$. Allora, per ogni $x_o \in X$, l'omomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_o) \rightarrow \pi_1(Y, y_o)$ è l'omomorfismo nullo; cioè f_* trasforma ogni elemento di $\pi_1(X, x_o)$ nell'elemento neutro di $\pi_1(Y, y_o)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se, nelle nostre ipotesi, applichiamo il risultato della proposizione precedente, abbiamo $\Phi_\alpha \circ f_*([\sigma]) = g_*([\sigma])$, ove g_* è l'omomorfismo nullo (cfr. **Esempio 2.5.7**) e Φ_α è un isomorfismo. Ne segue che $\Phi_\alpha \circ f_*$ è l'omomorfismo nullo e, di conseguenza, anche f_* è tale. \square

PROPOSIZIONE 2.5.11. *Siano X e Y spazi topologici connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(X \times Y)$ dello spazio prodotto $X \times Y$ risulta isomorfo al prodotto dei gruppi $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un punto $x_o \in X$, un punto $y_o \in Y$ e consideriamo le proiezioni canoniche

$$p^X : (x, y) \in X \times Y \rightarrow x \in X, \quad p^Y : (x, y) \in X \times Y \rightarrow y \in Y.$$

Gli omomorfismi

$$p_*^X : [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_o, y_o)) \rightarrow [p^X \circ \alpha] \in \pi_1(X, x_o)$$

e

$$p_*^Y : [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_o, y_o)) \rightarrow [p^Y \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_o)$$

inducono l'omomorfismo

$$f : [\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_o, y_o)) \rightarrow (p_*^X([\alpha]), p_*^Y([\alpha])) \in \pi_1(X, x_o) \times \pi_1(Y, y_o),$$

che proveremo essere un isomorfismo.

Osserviamo che risulta $k = (k_{x_o}, k_{y_o})$, ove k, k_{x_o}, k_{y_o} sono rispettivamente il laccio di $X \times Y$ costante in (x_o, y_o) , il laccio di X costante in x_o e il laccio di Y costante in y_o e supponiamo che per un laccio α di $X \times Y$ puntato in (x_o, y_o) sia $[\alpha] \in \text{Ker } f$, cioè $f([\alpha]) = ([k_{x_o}], [k_{y_o}])$. Allora esistono un'omotopia F_X tra i lacci $p^X \circ \alpha$ e k_{x_o} e una F_Y tra $p^Y \circ \alpha$ e k_{y_o} e queste inducono l'omotopia definita da $F = (F_X, F_Y)$ tra α e k . Ne segue che $\text{Ker } f = \{[k]\}$ e così f è iniettivo.

Per provare che f è suriettivo, consideriamo $[\sigma] \in \pi_1(X, x_o)$, $[\tau] \in \pi_1(Y, y_o)$ e il laccio α di $X \times Y$ con punto base (x_o, y_o) definito da $\alpha(s) = (\sigma(s), \tau(s))$, $s \in I$. Risulta $p^X \circ \alpha = \sigma$ e $p^Y \circ \alpha = \tau$, cioè $f([\alpha]) = ([\sigma], [\tau])$ e l'asserto è provato. \square

2.5.2 Gruppo fondamentale ed equivalenze omotopiche

In questo paragrafo studieremo le relazioni che intercorrono tra i gruppi fondamentali di spazi omotopicamente equivalenti. Vedremo, tra l'altro, che il gruppo

fondamentale, nell'ambito degli spazi connessi per archi, è un invariante omotopico, come era da prevedere grazie anche alla funtorialità della sua costruzione (cfr. **Proposizione 2.5.8**).

PROPOSIZIONE 2.5.12. *Siano $f : X \rightarrow X$ una mappa dello spazio topologico X in sé e x_o un punto di X . Allora, se f è omotopa all'identità i_X di X , l'omomorfismo di gruppi (2.35)*

$$f_* : [\sigma] \in \pi_1(X, x_o) \rightarrow [f \circ \sigma] \in \pi_1(X, f(x_o))$$

è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Siano F un'omotopia tra f e i_X e $\alpha(t) = F(x_o, t)$, $t \in I$, l'arco tra $f(x_o)$ e x_o indotto da F . Allora, per la (2.37), $(i_X)_*$ è l'identità del gruppo $\pi_1(X, x_o)$ e, in forza della **Proposizione 2.5.9**, risulta $(i_X)_* = \Phi_\alpha \circ f_*$. Ne segue che, essendo $(i_X)_*$ e Φ_α isomorfismi, anche f_* lo è. \square

PROPOSIZIONE 2.5.13. *Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica e x_o un punto di X . Allora l'omomorfismo di gruppi $f_* : \pi_1(X, x_o) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_o))$ è un isomorfismo. In particolare, due spazi connessi per archi e omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $g : Y \rightarrow X$ è un'inversa omotopica di f , considerati gli omomorfismi

$$\pi_1(X, x_o) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_o)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_o))),$$

abbiamo $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, in forza della (2.36). Inoltre, essendo $g \circ f$ omotopo a id_X , per la **Proposizione 2.5.12**, $(g \circ f)_*$ è un isomorfismo e, di conseguenza, f_* è un monomorfismo e g_* è un epimorfismo. D'altra parte, ragionando in modo analogo con gli omomorfismi

$$\pi_1(Y, f(x_o)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_o))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(x_o))))$$

e tenendo presente che $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ è un isomorfismo (perché $f \circ g$ è omotopo a id_Y), si ha che g_* è un monomorfismo. Ne segue che g_* , e quindi f_* , è un isomorfismo e l'asserto è provato. \square

2.6 Spazi semplicemente connessi

Tra gli spazi topologici connessi per archi, i primi che viene naturale studiare sono quelli con gruppo fondamentale banale. Questi, come vedremo, rivestono un ruolo particolarmente importante in geometria e ciò giustifica la definizione che segue.

DEFINIZIONE 2.6.1. Uno spazio topologico X si dice **semplicemente connesso** se è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale è banale, cioè $\pi_1(X) = \{1\}$. \square

PROPOSIZIONE 2.6.2. *Uno spazio topologico X connesso per archi è semplicemente connesso se, e solo se, vale una delle seguenti proprietà:*

- (1) ogni laccio di X con punto base x_o è omotopo al laccio costante in x_o , per ogni $x_o \in X$;
- (2) due arbitrari archi di X con gli stessi estremi sono omotopi. \square

DIMOSTRAZIONE. La prima parte è immediata; proviamo quindi la seconda. Se $\pi_1(X) = \{1\}$ e f, g sono due archi di X da x_o a x_1 , allora $f * \bar{g}$ è un laccio di X con punto base x_o omotopo al laccio costante in x_o e $\bar{g} * g$ è un laccio di X con punto base x_1 omotopo al laccio costante in x_1 . Ne segue che $f \sim f * (\bar{g} * g) \sim (f * \bar{g}) * g \sim g$. Viceversa, se vale la (2), per ogni $x_o \in X$, ogni laccio di X con punto base x_o è omotopo al laccio costante in x_o e, di conseguenza, $\pi_1(X) = \{1\}$. \square

ESEMPIO 2.6.3. (Spazi contraibili) Uno spazio topologico che si riduce ad un punto è ovviamente semplicemente connesso. Dalla **Proposizione 2.5.13** segue allora che ogni spazio topologico contraibile è semplicemente connesso. In particolare, risultano semplicemente connessi i sottospazi stellati di \mathbb{R}^n (cfr. **Proposizione 2.4.17**) e, quindi, \mathbb{R}^n stesso e i suoi sottospazi convessi, tra cui D^n e B^n , per ogni $n > 0$. Risulta, inoltre, semplicemente connesso $S^n \setminus \{x_o\}$, per ogni punto $x_o \in S^n$ e $n > 0$ (cfr. **Corollario 2.4.18**). \square

PROPOSIZIONE 2.6.4. *Sia $X = A \cup B$, con A, B aperti semplicemente connessi e $A \cap B$ connesso per archi. Allora X è semplicemente connesso.*

DIMOSTRAZIONE. In forza della **Proposizione 2.3.15**, X è connesso per archi, così basta provare che per un punto $x_o \in A \cap B$ il gruppo $\pi_1(X, x_o)$ è banale (cfr. **Proposizione 2.5.5**); cioè che ogni laccio $\sigma : I \rightarrow X$ di punto base x_o è omotopo ad un laccio di A con lo stesso punto base.

A tale scopo, cominciamo con l'osservare che $\sigma^{-1}(A)$ e $\sigma^{-1}(B)$ sono due aperti di I che ricoprono I ; quindi risulta

$$\sigma^{-1}(A) = \bigcup_{s \in S} J_{A,s} \quad , \quad \sigma^{-1}(B) = \bigcup_{t \in T} J_{B,t} \quad ,$$

ove, per ogni $s \in S$ e $t \in T$, $J_{A,s}$ e $J_{B,t}$ sono intervalli aperti o semiaperti (contenenti 0 o 1 a seconda che sono aperti a destra o a sinistra, rispettivamente). Osserviamo esplicitamente che risulta

$$\sigma(J_{A,s}) \subseteq A \quad , \quad \sigma(J_{B,t}) \subseteq B \quad ,$$

per ogni $s \in S$ e $t \in T$. Inoltre, la famiglia

$$\{J_{A,s} : s \in S\} \cup \{J_{B,t} : t \in T\}$$

è un ricoprimento di aperti di I dal quale, essendo I compatto, se ne può estrarre uno finito. A partire da questo ricoprimento possiamo costruire una suddivisione di I mediante un numero finito di punti $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tali che

- $\sigma([t_{i-1}, t_i])$ è contenuto in A o in B ,
- n è il minimo possibile per una suddivisione di questo tipo.

In queste ipotesi, risulta $\sigma(t_i) \in A \cap B$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe un intero j tale che $\sigma(t_j) \notin A$ o $\sigma(t_j) \notin B$. Allora, se per esempio è $\sigma(t_j) \notin A$, risulta

$$\sigma([t_{j-1}, t_j]) \cup \sigma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq B,$$

da cui avremmo $\sigma([t_{j-1}, t_{j+1}]) \subseteq B$. Ciò è assurdo perché ci permetterebbe di eliminare t_j dalla suddivisione di I che era stata scelta minima rispetto ad n .

Consideriamo ora, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, l'arco

$$\sigma_i : s \in I \rightarrow \sigma((1-s)t_{i-1} + st_i) \in X \quad (2.39)$$

riparametrizzazione su I della restrizione di σ a $[t_{i-1}, t_i]$, che per costruzione è un arco di A o di B e proviamo che σ_i , se non è un arco di A , è necessariamente omotopo ad un arco di A .

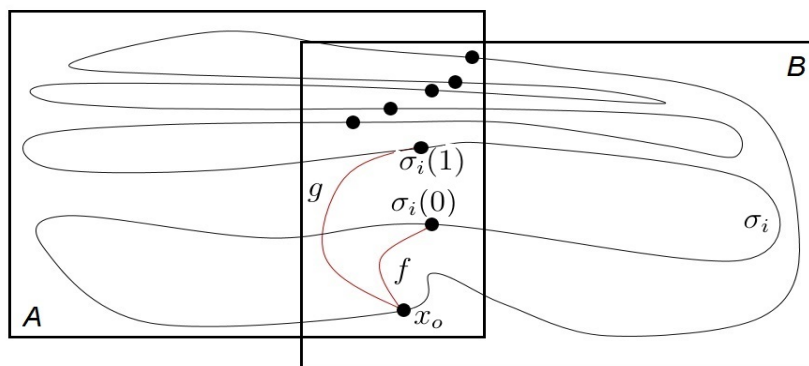


Figura 2.8: Proposizione 2.6.4

Se σ_i non è un arco di A , è un arco di B e, dal momento che $A \cap B$ contiene gli estremi di σ_i ed è connesso per archi, $A \cap B$ contiene anche un arco f di estremi $f(0) = x_o$ e $f(1) = \sigma_i(0)$ e uno g di estremi $g(0) = x_o$ e $g(1) = \sigma_i(1)$ (cfr. **Figura 2.8**). Allora $f * \sigma_i * \bar{g}$, essendo un laccio di B puntato in x_o e essendo B semplicemente

connesso, è omotopo al laccio costante k_{x_o} in B e, quindi, in X . Ne segue che σ_i è omotopo in X all'arco $\bar{f} * g$, che è contenuto in $A \cap B$ e quindi in A , mediante un'omotopia

$$F_i : (s, t) \in I \times I \rightarrow F_i(s, t) \in A$$

tra σ_i e $\bar{f} * g$. Risulta quindi

$$F_i(s, 0) = \sigma_i(s), \quad F_i(s, 1) = \bar{f} * g(s), \quad F_i(0, t) = \sigma_i(s), \quad F_i(1, t) = \sigma_i(1),$$

per ogni $(s, t) \in I \times I$. A questo punto, se consideriamo le riparametizzazioni

$$(s, t) \in [t_{i-1}, t_i] \times I \rightarrow F_i\left(\frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, t\right) \in A$$

delle F_i a $[t_{i-1}, t_i] \times I$ e le incolliamo, otteniamo la funzione $F : (s, t) \in I \times I \rightarrow A$ definita da

$$F(s, t) = F_i\left(\frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, t\right); \quad (s, t) \in [t_{i-1}, t_i] \times I, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e questa, essendo $t_o = 0$, è un'omotopia tra

$$F(s, 0) = F_1\left(\frac{s}{t_1}, 0\right) = \sigma_1\left(\frac{s}{t_1}\right) = \sigma\left(\left(1 - \frac{s}{t_1}\right)t_o + \frac{s}{t_1}t_1\right) = \sigma(s)$$

(cfr. (2.39)) e $F(s, 1)$, che è un laccio di A . □

Una classe notevole di spazi semplicemente connessi è data dalle superfici sferiche S^n , con $n > 1$, come mostra il risultato che segue. Il caso della circonferenza S^1 sarà studiato a parte.

PROPOSIZIONE 2.6.5. S^n è semplicemente connesso, per ogni intero $n > 1$.

DIMOSTRAZIONE. Se \mathbf{a}, \mathbf{b} sono punti antipodali di S^n , i sottospazi $A = S^n \setminus \{\mathbf{a}\}$, $B = S^n \setminus \{\mathbf{b}\}$ di S^n sono aperti e, essendo omeomorfi a \mathbb{R}^n , sono anche semplicemente connessi. D'altra parte, $S^n = A \cup B$ e $A \cap B = S^n \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ è connesso per archi, così l'asserto segue dalla **Proposizione 2.6.4**.

Riteniamo utile per il Lettore riportare di seguito una seconda dimostrazione, indipendente dalla **Proposizione 2.6.4**, che sfrutta soltanto alcune proprietà geometriche di S^n .

Siano x_o, x_1 due punti di S^n e $y \in S^n$ un punto distinto da x_o e x_1 . Allora $S^n \setminus \{y\}$, essendo omeomorfo a \mathbb{R}^n , è connesso per archi. Esiste, quindi, un arco in $S^n \setminus \{y\}$ di estremi x_o, x_1 , che è anche un arco di S^n con gli stessi estremi. Così S^n è connesso per archi. D'altra parte, se α è un laccio di S^n di punto base x_o ed esiste un

punto $y \in S^n$ non appartenente al supporto di α , allora α è omotopo alla funzione costante in x_o perché $S^n \setminus \{y\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n , che è semplicemente connesso (cfr. **Esempio 2.6.3**). Questo significa che, per provare che $\pi_1(S^n) = \{1\}$, basta far vedere che ogni laccio σ in S^n di punto base x_o è omotopo ad un laccio α di base x_o per cui esiste $y \in S^n$ non appartenente al supporto di α .

A tale scopo, siano $\sigma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un laccio suriettivo di punto base x_o , $y \in S^n$ un punto diverso da x_o e diciamo $B = B_\epsilon^n(y) \cap S^n$ l'intersezione di S^n con un intorno sferico $B_\epsilon^n(y)$ di \mathbb{R}^n di centro y e raggio ϵ con $x_o \notin B_\epsilon^n(y)$, cioè ϵ minore della distanza tra x_o e y . Si ha che B è un aperto di S^n , la chiusura \overline{B} di B è omeomorfa a B^{n-1} e la frontiera ∂B di B è omeomorfa a S^{n-1} .

Poiché $\sigma(0) = \sigma(1) = x_o$ e $x_o \notin B$, la controimmagine $\sigma^{-1}(B)$ è un aperto di $[0, 1]$ contenuto in $]0, 1[$ e, quindi, è unione di intervalli $]a_j, b_j[$ a due a due disgiunti, con j variabile in un insieme di indici J . Osserviamo che, per ogni $j \in J$, a_j e b_j non appartengono a $\sigma^{-1}(B)$ e, quindi, $\sigma(a_j)$ e $\sigma(b_j)$ appartengono alla frontiera ∂B di B .

La controimmagine $\sigma^{-1}(y) (\subseteq \sigma^{-1}(B))$, essendo un sottospazio chiuso e limitato di $[0, 1]$, è compatto e, quindi, è contenuto nell'unione di un numero finito di intervalli $]a_j, b_j[$, con $j \in J$.

Consideriamo uno degli intervalli $]a_j, b_j[$ che intersecano $\sigma^{-1}(y)$ e denotiamo con σ_j la restrizione di σ a $]a_j, b_j[$, che può riguardarsi come un arco di S^n di estremi $\sigma(a_j)$, $\sigma(b_j)$. Per costruzione, il codominio di σ_j è contenuto nella chiusura di B e $\sigma_j(a_j)$ e $\sigma_j(b_j)$ appartengono alla frontiera ∂B di B . Tale frontiera è connessa per archi e di conseguenza esiste un arco τ_j di ∂B di estremi $\sigma(a_j)$, $\sigma(b_j)$. Si osservi che y non appartiene al codominio di τ_j perché $y \notin \partial B$. A questo punto, detotato con F un sottoinsieme finito di J per cui

$$\sigma^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{j \in F}]a_j, b_j[,$$

definiamo il laccio $\tau : [0, 1] \rightarrow S^n$ nel seguente modo

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_j(t) & \text{se } t \in]a_j, b_j[\text{ per qualche } j \in F \\ \sigma(t) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Notiamo che il supporto di τ si ottiene modificando quello di σ mediante la sostituzione del supporto di ogni σ_j col corrispondente supporto di τ_j , con $j \in F$. Ora, poiché la chiusura di B è omeomorfa a B^{n-1} , che è uno spazio semplicemente connesso (cfr. **Esempio 2.6.3**), gli archi σ_j e τ_j sono omotopi, per ogni $j \in F$ e di conseguenza τ è omotopo a σ e non contiene y . Si ha così l'asserto. \square

COROLLARIO 2.6.6. $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è semplicemente connesso, per ogni $n > 2$ e per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x, y \in S^n$, $x \neq y$, \mathbb{R}^n è omeomorfo a $S^n \setminus \{y\}$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è omeomorfo a $S^n \setminus \{x, y\}$, $S^n \setminus \{x, y\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ e, di conseguenza, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Allora, l'asserto segue dalla proposizione precedente e dalle **Proposizioni 2.6.5 e 2.5.11.** \square

OSSERVAZIONE 2.6.7. (La connessione semplice non implica la contraibilità) È possibile provare (purtroppo non abbiamo ancora gli strumenti per farlo!) che, per ogni intero positivo n , S^n **non è contraibile**. Abbiamo così che, per $n > 1$, S^n è un esempio di *spazio semplicemente connesso non contraibile*. \square

2.7 Gruppo fondamentale della circonferenza e alcune sue applicazioni

Provare in modo diretto che il gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi è non banale è, in generale, un problema non semplice. Per fare ciò, infatti, bisogna trovare due lacci tra i quali non vi è alcuna omotopia ed è proprio questo il punto delicato del problema. Vedremo, comunque, che ciò si può fare senza grosse difficoltà, ma in modo non banale, nel caso della circonferenza S^1 .

Consideriamo la mappa

$$E : s \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{s} = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \in S^1 \quad (2.40)$$

che, come facilmente si prova, è aperta, suriettiva e periodica di periodo 1.

LEMMA 2.7.1. Siano $g, g' : I \rightarrow \mathbb{R}$ archi di \mathbb{R} di punto iniziale 0 e tali che $E \circ g = E \circ g'$. Allora risulta $g = g'$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, risulta $E(g(t)) = E(g'(t))$, cioè

$$(\cos 2\pi g(t), \sin 2\pi g(t)) = (\cos 2\pi g'(t), \sin 2\pi g'(t)),$$

e quindi $2\pi g(t) - 2\pi g'(t) = 2\pi(g(t) - g'(t))$ è un multiplo intero di 2π . Allora $g(t) - g'(t)$ è un intero, per ogni $t \in I$, e $(g - g')(I)$ è contenuto nell'insieme \mathbb{Z} degli interi. Ora osserviamo che \mathbb{Z} è totalmente sconnesso, nel senso che le sue componenti connesse sono i singleton dei suoi punti, e $(g - g')(I)$ è connesso in quanto immagine del connesso I mediante una funzione continua. Ne segue che, essendo $g(0) = g'(0) = 0$, risulta $(g - g')(I) = \{0\}$ e cioè $g = g'$. \square

LEMMA 2.7.2. (Sollevamento degli archi) Se $f : I \rightarrow S^1$ è un arco in S^1 di punto iniziale $x_o = (1, 0)$, esiste in \mathbb{R} un unico arco $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ di punto iniziale 0 tale che $f = E \circ \tilde{f}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, $f^{-1}(S^1 \setminus \{-f(t)\})$ è un aperto di I , che risulta unione di intervalli aperti o semiaperti (contenenti 0 o 1 a seconda che sono aperti a destra o a sinistra, rispettivamente) e, al variare di $t \in I$, questi intervalli danno un ricoprimento di aperti di I . Così, dalla compattezza di I e ragionando come nella dimostrazione della **Proposizione 2.6.4**, segue che esistono degli interi $t_o = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = 1$, con $t_o < t_1 < \dots < t_n$, tali che

$$f([t_{j-1}, t_j]) \subseteq S^1 \setminus \{-f(t_{j-1})\}, \quad (2.41)$$

per ogni $j = 1, 2, \dots, n$. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, posto $I_x = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, la funzione

$$E_x : s \in I_x \rightarrow \mathbf{s} \in E(I_x) = S^1 \setminus \{(-\cos 2\pi x, -\sin 2\pi x)\}, \quad (2.42)$$

restrizione di E a I_x e $E(I_x)$, è un omeomorfismo e denotiamo con $f|_{[c,d]}$ la restrizione di f ad un intervallo $[c, d] \subseteq I$. Allora, per $j = 1$,

$$f([0, t_1]) \subseteq S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

e quindi è possibile definire la mappa

$$f_1 = E_0^{-1} \circ f|_{[0, t_1]} : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R},$$

per la quale risulta $f_1(0) = 0$ e $E \circ f_1 = f|_{[0, t_1]}$. Ora, procedendo per induzione su j , supponiamo che per $j > 1$ abbiamo definito una mappa

$$f_j : [0, t_j] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } f_j(0) = 0 \text{ e } E \circ f_j = f|_{[0, t_j]}$$

e, se è $j < n$, consideriamo la mappa (cfr. (2.42))

$$E_{f_j(t_j)}^{-1} : S^1 \setminus \{-E(f(t_j))\} \rightarrow \left(f_j(t_j) - \frac{1}{2}, f_j(t_j) + \frac{1}{2} \right).$$

Allora, incollando f_j con $E_{f_j(t_j)}^{-1} \circ f|_{[t_j, t_{j+1}]}$, resta definita la mappa

$$f_{j+1} : [0, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

per cui è $f_{j+1}(0) = 0$, $E \circ f_{j+1} = f|_{[0, t_{j+1}]}$ e così abbiamo che f_n è la mappa cercata \tilde{f} . L'unicità di \tilde{f} è conseguenza del lemma precedente. \square

L'arco \tilde{f} , di cui al precedente lemma, prende il nome di **sollevamento di f a \mathbb{R} di punto iniziale 0**.

LEMMA 2.7.3. (Sollevamento delle omotopie) Siano $f, g : I \rightarrow S^1$ due archi omotopi in S^1 di punto iniziale $(1, 0)$, $\tilde{f}, \tilde{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ gli unici sollevamenti a \mathbb{R} di f, g di punto iniziale 0 e $F : I \times I \rightarrow S^1$ un'omotopia tra f e g . Allora esiste un'unica omotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tra \tilde{f} e \tilde{g} tale che $F = E \circ \tilde{F}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $t \in I$, sia $F_t : I \rightarrow S^1$ l'arco di S^1 di punto iniziale $(1, 0)$, restrizione a $I \times \{t\}$ di $F : I \times I \rightarrow S^1$. Possiamo allora definire la funzione

$$\tilde{F} : (s, t) \in I \times I \rightarrow \tilde{F}_t(s) \in \mathbb{R},$$

ove \tilde{F}_t è l'unico sollevamento a \mathbb{R} dell'arco F_t e risulta $E \circ \tilde{F} = F$. È possibile provare che \tilde{F} è una funzione continua (per una dimostrazione si veda [9], Lemma 16.2, pag.155) e così \tilde{F} è un'omotopia con la proprietà richiesta. Ora consideriamo un'altra omotopia \tilde{F}' tra \tilde{f} e \tilde{g} tale che $F = E \circ \tilde{F}'$. Allora, per ogni $t \in I$ e per l'unicità del sollevamento degli archi di S^1 , la restrizione di \tilde{F}' a $I \times \{t\}$ coincide con il sollevamento \tilde{F}_t di F_t e risulta $\tilde{F} = \tilde{F}'$. \square

L'omotopia \tilde{F} , di cui al lemma precedente, prende il nome di **sollevamento di F a \mathbb{R}** .

Per ogni intero $n \in \mathbb{Z}$, consideriamo il laccio di S^1

$$\omega_n : s \in I \rightarrow (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns) \in S^1 \quad (2.43)$$

di punto base $(1, 0)$ e l'unico arco da 0 a n , sollevamento di ω_n a \mathbb{R} ,

$$\tilde{\omega}_n : s \in I \rightarrow ns \in \mathbb{R}, \quad (2.44)$$

per cui risulta

$$\omega_n = E \circ \tilde{\omega}_n. \quad (2.45)$$

La (2.45), parlando in modo informale, esprime il fatto che il supporto di ω_n si ottiene avvolgendo $|n|$ volte su S^1 l'intervallo $[0, n]$ di \mathbb{R} partendo da $(1, 0)$, in senso antiorario se $n > 0$ e in senso orario se $n < 0$, in modo che la restrizione di ω_n all'intervallo $] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$ sia un omeomorfismo tra $] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$ e $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$, per ogni $k = 0, 1, \dots, n-1$.

LEMMA 2.7.4. Ogni arco \tilde{f}_n in \mathbb{R} da 0 a n è omotopo a $\tilde{\omega}_n$, per ogni intero n . Ne segue che il laccio $E \circ \tilde{f}_n$ è omotopo a $\omega_n = E \circ \tilde{\omega}_n$, per ogni intero n .

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che \mathbb{R} è semplicemente connesso e dalla **Proposizione 2.6.2**. Comunque, si verifica subito che l'omotopia lineare $F(t, s) = (1-t)\tilde{f}_n + t\tilde{\omega}_n$ è un'omotopia tra \tilde{f}_n e $\tilde{\omega}_n$. \square

PROPOSIZIONE 2.7.5. La funzione

$$\Phi : n \in \mathbb{Z} \rightarrow [\omega_n] \in \pi_1(S^1) \quad (2.46)$$

è un omomorfismo tra il gruppo additivo di \mathbb{Z} e il gruppo fondamentale di S^1 .

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo provare che, per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\Phi(m+n) = \Phi(m)\Phi(n), \quad (2.47)$$

cioè che $[\omega_{m+n}] = [\omega_m][\omega_n] = [\omega_m * \omega_n]$. A tale scopo, consideriamo in \mathbb{R} la traslazione $\tau_m : x \in \mathbb{R} \rightarrow x + m \in \mathbb{R}$ e osserviamo che la mappa $\tilde{g} = \tilde{\omega}_m * (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$, definita da

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} \tilde{\omega}_m(2s) = 2ms & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n(2s-1) = (2s-1)n + m & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases},$$

è un arco in \mathbb{R} tra 0 e $m+n$ da cui segue, in forza del **Lemma 2.7.4**, che

$$[\omega_{m+n}] = [E \circ \tilde{g}].$$

D'altra parte, risulta

$$E \circ \tilde{g}(s) = \begin{cases} (\cos 2\pi(2ms), \sin 2\pi(2ms)) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (\cos 2\pi(n(2s-1) + m), \sin 2\pi(n(2s-1) + m)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases},$$

da cui, usando le formule di addizione delle funzioni seno e coseno, ricaviamo

$$E \circ \tilde{g}(s) = \begin{cases} (\cos 2\pi(2ms), \sin 2\pi(2ms)) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (\cos 2\pi n(2s-1), \sin 2\pi n(2s-1)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \omega_m * \omega_n(s).$$

Abbiamo così che $E \circ \tilde{g} = \omega_m * \omega_n$, cioè la (2.47). \square

PROPOSIZIONE 2.7.6. (Gruppo fondamentale di S^1) Il gruppo fondamentale della circonferenza $\pi_1(S^1)$ è isomorfo al gruppo additivo di \mathbb{Z} .

DIMOSTRAZIONE. Proveremo che l'omomorfismo Φ definito dalla (2.46) è un isomorfismo, cominciando col provare che Φ è suriettivo. Siano $[\alpha]$ un elemento di $\pi_1(S^1)$, con $\alpha(0) = \alpha(1) = (1, 0)$, e $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ l'unico sollevamento di α ad \mathbb{R} di punto iniziale 0. Poiché risulta

$$E \circ \tilde{\alpha}(1) = E(\tilde{\alpha}(1)) = (\cos 2\pi\tilde{\alpha}(1), \sin 2\pi\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = (1, 0),$$

deve esistere un intero n tale che $\tilde{\alpha}(1) = n$. Allora, in forza del **Lemma 2.7.4**, risulta

$$\Phi(n) = [\omega_n] = [E \circ \tilde{\omega}_n] = [E \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]$$

e Φ è suriettivo.

Proviamo ora che Φ è iniettivo. Nell'ipotesi che sia $\Phi(m) = \Phi(n)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$,

i lacci ω_m e ω_n sono omotopi e siano $F : I \times I \rightarrow S^1$ un'omotopia tra ω_m e ω_n e $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ l'omotopia tra $\tilde{\omega}_m$ e $\tilde{\omega}_n$, unico sollevamento a \mathbb{R} di F . Ora, per ogni fissato $t \in I$, $\tilde{F}(s, t)$ è un arco in \mathbb{R} il cui punto finale $\tilde{F}(1, t)$ è indipendente da t e, quindi, per $t = 0$ e $t = 1$ abbiamo

$$m = \tilde{\omega}_m(1) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\omega}_n(1) = n.$$

Ne segue che Φ è iniettiva. \square

COROLLARIO 2.7.7. *Il gruppo fondamentale del cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ è isomorfo a \mathbb{Z} . Il gruppo fondamentale del toro $S^1 \times S^1$ è isomorfo a \mathbb{Z}^2 . In particolare, il cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ e il toro $S^1 \times S^1$ sono spazi topologici non isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. È conseguenza immediata della **Proposizione 2.5.11** e della **Proposizione 2.7.6**. \square

Chiudiamo il paragrafo mostrando alcune applicazioni della **Proposizione 2.7.6**.

PROPOSIZIONE 2.7.8. \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a \mathbb{R}^n , per ogni $n > 0$ e diverso da due.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che \mathbb{R} privato di un suo punto è uno spazio sconnesso mentre ciò non accade per \mathbb{R}^2 . Ne segue che \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 non possono essere omeomorfi.

Se x, y sono punti distinti di $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e z è un punto di \mathbb{R}^2 , si ha che $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ è omeomorfo a $S^2 \setminus \{x, y\}$ che, a sua volta, è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$. Allora, in forza della **Proposizione 2.5.11**, risulta

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}) \simeq \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \times \{1\} \simeq \mathbb{Z}. \quad (2.48)$$

D'altra parte, per $n > 2$, se x, y sono punti distinti di $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e z è un punto di \mathbb{R}^n , si ha che $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$ è omeomorfo a $S^n \setminus \{x, y\}$ che, a sua volta, è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Allora, ancora in forza della **Proposizione 2.5.11**, risulta

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{z\}) \simeq \pi_1(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \simeq \{1\} \times \{1\} \simeq \{1\}. \quad (2.49)$$

Ora, se per $n > 2$ esistesse un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, detto z un punto di \mathbb{R}^2 , gli spazi $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{f(z)\}$ sarebbero omeomorfi e, di conseguenza, avrebbero gruppi fondamentali isomorfi. Ciò è assurdo in forza delle (2.48) e (2.49). \square

La proposizione precedente è caso particolare del seguente teorema, la cui dimostrazione non viene riportata perché necessita di strumenti più profondi di quelli trattati in queste note.

PROPOSIZIONE 2.7.9. (Teorema dell'invarianza della dimensione) \mathbb{R}^m non è omeomorfo a \mathbb{R}^n , per ogni $n, m > 0$ e diversi tra loro.

DEFINIZIONE 2.7.10. Se A è un sottospazio di X , una mappa $r : X \rightarrow A$ prende il nome di **retrazione** di A su X se la restrizione di r ad A è l'identità i_A in A , cioè se $r \circ i = i_A$, i essendo la funzione inclusione di A in X ($i : a \in A \rightarrow a \in X$). Quando esiste una retrazione di A su X si dice che A è un **retrato** di X . \square

PROPOSIZIONE 2.7.11. Se $r : X \rightarrow A$ è una retrazione di A su X e $a_o \in A$, allora gli omomorfismi

$$i_* : \pi_1(A, a_o) \rightarrow \pi_1(X, a_o) \quad \text{e} \quad r_* : \pi_1(X, a_o) \rightarrow \pi_1(A, a_o)$$

sono rispettivamente un monomorfismo e un epimorfismo. In particolare $\pi_1(X, a_o)$ contiene il sottogruppo $i_*(\pi_1(A, a_o))$ isomorfo a $\pi_1(A, a_o)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $r \circ i = i_A$, dalla **Proposizione 2.5.12** abbiamo che $(r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ è un automorfismo di $\pi_1(A, a_o)$, quindi è una funzione biunivoca e da ciò segue l'asserto. \square

COROLLARIO 2.7.12. S^1 non è un retratto di D^2 .

DIMOSTRAZIONE. Se esistesse una retrazione r di S^1 su D^2 , in forza della **Proposizione 2.7.11**, il gruppo fondamentale di D^2 , che è banale, conterrebbe un sottogruppo isomorfo al gruppo fondamentale di S^1 , che è isomorfo a \mathbb{Z} . \square

PROPOSIZIONE 2.7.13. (Teorema del punto fisso di Brouwer) Ogni mappa $f : D^2 \rightarrow D^2$ ha almeno un punto fisso; esiste cioè un punto $x_o \in D^2$ tale che $f(x_o) = x_o$.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, esista $f : D^2 \rightarrow D^2$ priva di punti fissi e osserviamo che la frontiera S^1 di D^2 è contenuta in D^2 . Allora possiamo definire la funzione $g : D^2 \rightarrow S^1$ che ad ogni punto $x \in D^2$ associa l'intersezione con S^1 della semiretta di origine $f(x)$ e contenente x (**Figura 2.9**). È possibile provare che tale funzione è continua e risulta $g(x) = x$, per ogni $x \in S^1$. La mappa g è dunque una retrazione di S^1 su D^2 e ciò è assurdo in forza del corollario precedente. \square

Mostriamo un'applicazione del **Proposizione 2.7.13** alle matrici reali.

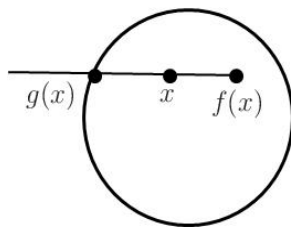


Figura 2.9: $g : D^2 \rightarrow S^1$

COROLLARIO 2.7.14. Ogni matrice quadrata reale A d'ordine 3 ad elementi positivi possiede un autovalore positivo.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che il sottospazio X di S^2 definito da

$$X = \{(x, y, z) \in S^2 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

è omeomorfo a D^2 e, in forza del **Teorema di Brouwer**, ogni mappa di X in sé ha un punto fisso. Inoltre, l'endomorfismo lineare L di \mathbb{R}^3 di equazione $(x', y', z')^t = A(x, y, z)^t$ è tale che le coordinate di $L(\mathbf{x})$ sono tutte positive, per ogni $\mathbf{x} \in X$. Allora possiamo considerare la funzione continua

$$f : \mathbf{x} \in X \rightarrow \frac{L(\mathbf{x})}{|L(\mathbf{x})|} \in X$$

ed un suo punto fisso \mathbf{a} . Ne segue che è $|L(\mathbf{a})|\mathbf{a} = L(\mathbf{a})$ e \mathbf{a} è un autovettore di L , e quindi di A , con autovalore positivo $|L(\mathbf{a})|$. \square

Osserviamo che anche la **Proposizione 2.7.13**, usando argomenti più avanzati di topologia algebrica, può essere dimostrata per qualsiasi dimensione $n > 2$.

2.7.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Come conseguenza di alcuni dei risultati ottenuti esporremo una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra⁴. A tale scopo, conveniamo di identificare \mathbb{R}^2 con l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} mediante la funzione biunivoca

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x + iy \in \mathbb{C}.$$

In questo modo, rimane definita su \mathbb{C} una topologia indotta da quella naturale di \mathbb{R}^2 , la **topologia naturale di \mathbb{C}** . Nel seguito supporremo sempre che \mathbb{C} sia dotato di tale topologia. Osserviamo che, in questa identificazione, alla circonferenza S^1 di centro l'origine e raggio 1 in \mathbb{R}^2 corrisponde l'insieme dei numeri complessi di modulo 1.

LEMMA 2.7.15. *Si consideri S^1 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1. Allora, per ogni intero $n \neq 0$, la funzione*

$$f^{(n)} : z \in S^1 \rightarrow z^n \in S^1$$

non è omotopa ad una funzione costante.

DIMOSTRAZIONE. Usando la notazione (2.43) del paragrafo precedente, abbiamo $f^{(n)} \circ \omega_1 = \omega_n$. Allora l'asserto segue dal fatto che la funzione (2.46) è biunivoca (cfr. **Proposizione 2.7.6**). \square

⁴La prima dimostrazione corretta di questo teorema risale al 1799 ed è dovuta a *F.Gauss*.

PROPOSIZIONE 2.7.16. (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio sul campo complesso \mathbb{C} di grado positivo ha almeno uno zero in \mathbb{C} .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p(z)$ un polinomio di grado positivo n a coefficienti in \mathbb{C} e osserviamo che, ai nostri fini, non è restrittivo supporre $p(z)$ monico e con termine costante diverso da zero; sia cioè

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n, \quad a_0 \neq 0, \quad n > 0.$$

Riguardiamo S^1 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 e, per assurdo, supponiamo che $p(z)$ non abbia zeri in \mathbb{C} . Allora la funzione continua $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$, definita da

$$H(z, t) = \begin{cases} z^n & \text{se } t = 0 \\ t^n p\left(\frac{(1-t)z}{t}\right) & \text{se } t \neq 0 \end{cases},$$

assume valori diversi da zero per ogni $(z, t) \in S^1 \times I$. È quindi possibile introdurre la funzione continua $F : S^1 \times I \rightarrow S^1$, definita da

$$F(z, t) = \frac{H(z, t)}{|H(z, t)|},$$

per la quale si ha

$$F(z, 0) = z^n \quad \text{e} \quad F(z, 1) = \frac{a_0}{|a_0|}.$$

Ne segue che F è un'omotopia tra la funzione $f^{(n)} : z \in S^1 \rightarrow z^n \in S^1$ e una funzione costante, il che è assurdo in forza del **Lemma 2.7.15**. \square

Elenco delle figure

1.1	Proposizione 1.2.13	9
1.2	Proposizione 1.2.14	10
1.3	Proprietà di Hausdorff	10
1.4	Proposizione 1.3.59	29
1.5	Esempio 1.5.22	44
1.6	Esempio 1.5.26	45
1.7	Esempio 1.5.28	46
1.8	Esempio 1.5.29	47
1.9	Esempio 1.5.30	47
1.10	Facce opposte di un cubo	49
1.11	I cinque poliedri regolari convessi (solidi platonici)	54
1.12	Proposizione 1.8.8	66
1.13	Corollario 1.8.9	66
1.14	Circonferenza e nodo a trifoglio	77
1.15	Proposizione 1.10.2	79
1.16	Esempio 1.10.11	82
1.17	Proposizione 1.10.14	83
1.18	Esempio 1.10.16	84
1.19	Esempio 1.10.19	86
1.20	Il cilindro	87
1.21	Il nastro di Möbius	88
1.22	Il toro	89

1.23	La bottiglia di Klein	90
1.24	Il piano proiettivo reale	92
1.25	Due nastri di Möbius nel piano proiettivo \mathbb{RP}^2	92
1.26	Due rappresentazioni del piano proiettivo reale in \mathbb{R}^3	93
1.27	Quozienti di quadrati etichettati	97
1.28	La superficie sferica S^2 e il piano proiettivo reale \mathbb{RP}^2	97
1.29	Somma connessa di due tori	98
1.30	$\Sigma_1 \# S^2 \simeq \Sigma_1$	99
1.31	$T_2 \simeq aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ e $U_2 \simeq aabb$	100
1.32	Proposizione 1.11.16	101
1.33	(bottiglia di Klein) $\simeq U_2$	101
1.34	$T_1 \# U_1$ e (bottiglia di Klein) $\# U_1$	101
1.35	$T_1 \# U_1$ e (bottiglia di Klein) $\# U_1$	102
1.36	$T_1 \# U_1 \simeq U_3$	102
1.37	Eliminazione di una coppia di lati adiacenti di primo tipo.	103
1.38	Riduzione ad un'unica classe d'equivalenza di vertici.	103
1.39	Rendere adiacenti i lati delle coppie di primo tipo.	104
1.40	104
1.41	105
1.42	Una triangolazione della sfera S^2	106
1.43	I passi della dimostrazione della Proposizione 1.11.28 per S^2	108
1.44	Triangolazioni del toro e del piano proiettivo	109
2.1	Il pettine del topologo	125
2.2	Omotopia $F(x, t)$ tra le mappe $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$	129
2.3	Omotopia tra due archi relativa agli estremi.	137
2.4	Schema per l'omotopia (2.23) tra $(\sigma * \tau) * \theta$ e $\sigma * (\tau * \theta)$	139
2.5	Schema per le omotopie (2.25) e (2.26)	141
2.6	Schema per l'omotopia (2.28) tra $\sigma * \bar{\sigma}$ e k	143
2.7	Schema per l'omotopia (2.30) tra $\sigma * \tau$ e $\sigma' * \tau'$	144

2.8 Proposizione 2.6.4 152
2.9 $g : D^2 \rightarrow S^1$ 160

Bibliografia

- [1] Graziano Gentili, *CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE*, Università di Firenze,
(<http://web.math.unifi.it/users/gentili/archivioldispenseI/Dispense25maggio.pdf>).
- [2] Allen Hatcher, *ALGEBRAIC TOPOLOGY*, Cambridge University Press, 2002
(<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>).
- [3] Seymour Lipschutz, *TOPOLOGIA*, McGraw-Hill, 1994
- [4] Luciano Lomonaco, *ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA*, Unitor, 1991.
- [5] Bruno Martelli, *CORSO DI TOPOLOGIA 2006*, Appunti delle lezioni per il corso di "Topologia e analisi complessa", Università di Pisa
(<http://www.dm.unipi.it/~martelli/didattica/matematica/2006/topologia.pdf>).
- [6] Gianluca Occhetta, *NOTE DI TOPOLOGIA GENERALE E PRIMI ELEMENTI DI TOPOLOGIA ALGEBRICA*, Dipartimento di Matematica, Università di Trento (<http://www.science.unitn.it/~occhetta/studenti/disp4fc.pdf>).
- [7] Gianluca Occhetta, *NOTE DI TOPOLOGIA ALGEBRICA E ANALISI COMPLESSA*, Dipartimento di Matematica, Università di Trento
(<http://www.science.unitn.it/~occhetta/studenti/disgeoIII.pdf>).
- [8] Assunta Russo, *LEZIONI DI TOPOLOGIA*, Aracne, 2002.
- [9] Edoardo Sernesi, *GEOMETRIA 2*, Bollati Boringhieri, 1994.
- [10] Edoardo Sernesi, *CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE TOPOLOGICHE*, Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre
(<http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/superfici.pdf>).